515
Os19m

NOORDHOFF'S VERZAMELING VAN WISKUNDIGE WERKEN

MODERNE INTEGRAALREKENING

DOOR

DR. C. H. VAN OS

P. NOORDHOFF. 1925 GRONINGEN.

THE UNIVERSITY
OF ILLINOIS
LIBRARY
515
~~517~~
Os19m

MATHEMATICS

Return this book on or before the
Latest Date stamped below.

University of Illinois Library

Jan 22, 1957

L161—1141

NOORDHOFF'S VERZAMELING
VAN WISKUNDIGE WERKEN.
DEEL 10.

NOORDHOFF'S VERZAMELING
VAN WISKUNDIGE WERKEN.

DEEL 10.

Dr. C. H. VAN OS

MODERNE
INTEGRAALREKENING

P. NOORDHOFF — 1925 — GRONINGEN.

MODERNE INTEGRAALREKENING

(INLEIDING TOT DE LEER DER PUNTVERZAMELINGEN EN DER INTEGRALEN VAN LEBESGUE)

DOOR

DR. C. H. VAN OS
HOOGLEERAAR AAN DE TECHNISCHE HOOGESCHOOL
TE DELFT

P. NOORDHOFF — 1925 — GRONINGEN.

517
Os19m
24My26

VOORREDE.

Hij, die de integraalrekening bestudeert, en gevorderd is tot het begrip „bepaalde integraal", zal van dit begrip 2 verschillende definities ontmoeten.

In de eerste plaats verstaat men onder $\int_a^b f(x)\,dx$, waarin $f(x)$ een continue functie is, die geen negatieve waarden aanneemt, den inhoud van een vlakke figuur, begrensd door de x-as, de in de punten $x = a$ en $x = b$ opgerichte ordinaten en de kromme $y = f(x)$. Neemt de functie $f(x)$ ook negatieve waarden aan, dan is de integraal een algebraïsche som van dergelijke vlakke inhouden.

In de tweede plaats wordt een bepaalde integraal gedefiniëerd als limiet van een zekere som; een definitie, die men kan uitdrukken door een formule als:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \Sigma f(x_k)\,\Delta x_k.$$

Deze tweede definitie heeft het voordeel, dat zij enkel van de begrippen der rekenkunde gebruik maakt, niet van het aan de meetkunde ontleende begrip „inhoud". Het ligt dus voor de hand, haar als primair te beschouwen, en den inhoud eener figuur juist door middel van de integraalrekening te definiëeren.

Hiermede zijn echter volstrekt niet alle moeilijkheden uit den weg geruimd. Heeft toch een figuur niet den boven beschreven specialen vorm, dan moet men haar opvatten als algebraïsche som van figuren, die wel den genoemden vorm hebben. Dit nu is op velerlei wijzen mogelijk, en de vraag rijst dus, of men altijd dezelfde uitkomst zal vinden.

Math. 11Mar26 Nyhoff.
599809

Deze moeilijkheid doet zich reeds in de gewone meetkunde voor. Om toch den inhoud eener figuur te bepalen, zal men haar òf als algebraïsche som van eenvoudiger figuren opvatten, òf wel insluiten tusschen figuren, die aldus kunnen worden verkregen. Zoowel het een als het ander is op verschillende wijzen mogelijk. Dat men altijd dezelfde uitkomst vindt, wordt in de gewone meetkunde als vanzelfsprekend aangenomen, maar is dit toch volstrekt niet.

Een exacte behandeling van deze vragen wordt eerst mogelijk, wanneer men uitgaat van de, in de 19e eeuw ontwikkelde, theorie der puntverzamelingen. Is men zoo gekomen tot een scherp gedefiniëerd inhoudsbegrip, waarvan de eigenschappen streng bewezen zijn, dan ligt het voor de hand, aan de eerste der 2 bovengenoemde definities de voorkeur te geven, en het begrip „integraal" uit het begrip „inhoud" af te leiden.

Tal van stellingen uit de integraalrekening volgen dan onmiddellijk uit de overeenkomstige stellingen van de theorie van den inhoud.

De meest bevredigende definitie van „inhoud" of „maat" is afkomstig van BOREL; het daarop gefundeerde integraalbegrip van LEBESGUE. Deze begrippen worden in dit boek uiteengezet. Gezien de belangrijkheid dezer begrippen schijnt het mij toe, dat naast de bestaande buitenlandsche leerboeken een niet te uitgebreid Nederlandsch werkje wellicht goede diensten zal doen.

In hoofdstuk I en hoofdstuk II worden de noodzakelijkste begrippen uit de leer der puntverzamelingen besproken. Hoofdstuk III behandelt de theorie van de maat. Bij de definitie van het begrip „meetbaarheid" en de behandeling der hiermede samenhangende eigenschappen heb ik mij vooral aangesloten bij CARATHEODORY, *Vorlesungen über reelle Funktionen.*

In hoofdstuk IV worden de belangrijkste begrippen behandeld, die betrekking hebben op de theorie der functies van reëele veranderlijken. In hoofdstuk V en hoofdstuk VI worden respectievelijk de theorie der bepaalde en die der onbepaalde integralen uiteengezet.

Ten einde den omvang van het werk niet te zeer te vergrooten heb ik aan de theorie der onbepaalde integralen een minder breede basis gegeven dan dit in andere leerboeken geschiedt. In het bijzonder zijn de afgeleiden eener verzamelingsfunctie uit-

sluitend gedefiniëerd met behulp van een rij van netten van intervallen, niet met behulp van rijen puntverzamelingen van een veel algemeener karakter. Toch kunnen reeds langs dezen weg enkele belangrijke uitkomsten worden afgeleid.

Ten slotte past mij een woord van hartelijken dank aan mijn ambtgenoot Dr. F. SCHUH voor zijn opwekking tot het schrijven van dit werk en voor de hulp, die ik bij het schrijven van de eerste hoofdstukken van hem mocht ondervinden. Ook zij mijn erkentelijkheid betuigd aan de firma P. NOORDHOFF voor de bereidwilligheid, waarmee zij de uitgave op zich nam en de wijze waarop bij de uitvoering mijn wenschen voorkomen zijn.

15 April 1925. CHS. H. VAN OS.

AAN MIJN ECHTGENOOTE EN
TROUWE MEDEWERKSTER
ZIJ DIT WERK OPGEDRAGEN.

INHOUD.

		Blz.
HOOFDSTUK I.	Grondbegrippen	1
HOOFDSTUK II.	Bewerkingen met puntverzamelingen . .	25
HOOFDSTUK III.	De maat van puntverzamelingen	38
HOOFDSTUK IV.	Functies	84
HOOFDSTUK V.	Bepaalde integralen	113
HOOFDSTUK VI.	Onbepaalde integralen	158

ERRATUM.

Op blz. 64 moet aan het slot van § 65 het volgende worden toegevoegd:

Wij zullen steeds onderstellen, dat de determinant der transformatie, d. w. z. de determinant der vergelijkingen, waardoor de grootheden x_k in de grootheden $\overline{x}_k$ worden uitgedrukt, *niet* de waarde *nul* heeft.

HOOFDSTUK I.

Grondbegrippen.

§ **1.** Wij onderstellen, dat de lezer bekend is met de leer der *reëele getallen* (geheele, gebroken en onmeetbare getallen). Deze toch vormt den grondslag van onze beschouwingen.

Wij zullen verder enkele begrippen en stellingen noodig hebben uit de algemeene leer der verzamelingen. Deze zullen wij in de eerstvolgende paragrafen uiteenzetten.

§ **2.** Zij gegeven een verzameling A van bepaalde dingen, die wij de *elementen* der verzameling noemen. Onder een **deelverzameling** of **deel** van A verstaan wij een verzameling B, die geen enkel element bevat, dat niet ook een element van A is. Men schrijft dan: $B < A$ of $A > B$.

Is $B < A$ en bevat A een element, dat niet tot B behoort, dan heet B een **echt deel** van A.

Is $B < A$ en $A < B$, dan zijn A en B identiek.

We zullen ook wel eens verzamelingen beschouwen, die uit geen enkel element bestaan. Zulke verzamelingen heeten **leeg**. Zijn A en B beide leeg, dan is er geen element van A, dat niet een element van B is en omgekeerd en dus zijn A en B identiek. Twee leege verzamelingen zijn dus steeds identiek. Verder ziet men gemakkelijk, dat de leege verzameling een echt deel van elke andere verzameling is.

§ **3.** Bestaat tusschen de elementen van twee verzamelingen A en B een zoodanig verband, dat bij ieder element van A een bepaald element van B behoort en omgekeerd, dan zegt men, dat tusschen A en B een **één-éénduidige correspondentie** bestaat, of wel, dat de eene verzameling op de andere is **afgebeeld.**

Indien een verzameling afgebeeld kan worden op de verzameling der natuurlijke getallen, die niet grooter dan een natuurlijk getal n zijn, zegt men, dat de verzameling eindig is of dat zij eindig vele (en wel n) elementen bevat. Kan dit niet, dan zegt men, dat de verzameling oneindig is of dat zij oneindig vele elementen bevat.

Een verzameling, die afgebeeld kan worden op de verzameling van alle natuurlijke getallen, heet **aftelbaar oneindig**.

Is A een aftelbaar oneindige verzameling, dan kan men dus aan ieder element a van A een natuurlijk getal k toevoegen. Noemt men k het *rangnummer* van a, dan kan men dus zeggen, dat bij een aftelbaar oneindige verzameling ieder element van een bepaald rangnummer kan worden voorzien, met dien verstande, dat bij een bepaald rangnummer ook steeds een bepaald element van de verzameling behoort.

§ 4. Het eenvoudigste voorbeeld van een aftelbaar oneindige verzameling is de verzameling der natuurlijke getallen zelf; immers, men kan ieder natuurlijk getal aan zich zelf toevoegen.

Om een tweede voorbeeld te vinden, beschouwen wij de verzameling van alle *paren* (al of niet gelijke) natuurlijke getallen. Hierbij zullen wij ook letten op de volgorde der getallen van een getallenpaar; zijn dus a en b twee verschillende natuurlijke getallen, dan zullen wij de paren (a, b) en (b, a) verschillend noemen.

Wij rangschikken de elementen van onze verzameling nu als volgt:

$(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (1, 4), \ldots\ldots$

Wij nemen dus eerst het paar $(1, 1)$, waarvan de som der beide getallen 2 is; vervolgens de paren, waarvoor de som der beide getallen 3 is, dan die, waarvoor de genoemde som 4 is, enz. De paren, waarvoor de genoemde som dezelfde waarde heeft, rangschikken wij naar opklimmende waarden van het eerste getal. Het is duidelijk, dat ieder getallenpaar zoo op een bepaald oogenblik aan de beurt komt en dus een bepaald rangnummer verkrijgt. Omgekeerd behoort bij ieder rangnummer een bepaald getallenpaar, waarmee de stelling bewezen is.

VRAAGSTUKKEN.

1. Bewijs, dat bij de bovenstaande rangschikking het getallenpaar (a, b) het rangnummer $\frac{1}{2}(a+b-1)(a+b-2)+a$ krijgt.

2. Welk is het getallenpaar met rangnummer 10000?

3. Bewijs, dat de verzameling van alle drietallen natuurlijke getallen aftelbaar oneindig is.

4. Zoo men de getallentripels rangschikt naar de som der getallen, bij gelijke som het tripel met het kleinste eerste getal laat voorgaan, enz., bepaal dan het rangnummer van (a, b, c).

5. Bewijs, dat de verzameling van alle k-tallen natuurlijke getallen (k gegeven) aftelbaar oneindig is.

§ **5.** In plaats van „aftelbaar oneindig" zullen we voortaan kortweg „aftelbaar" zeggen. Ook zegt men wel, dat de verzameling aftelbaar vele elementen bevat, of dat het aantal elementen der verzameling aftelbaar is.

Stelling. *Een verzameling, die op een aftelbare verzameling kan worden afgebeeld, is zelf aftelbaar.*

Zij A een aftelbare verzameling en B een verzameling, die op A is afgebeeld. Zij b een element van B, a het correspondeerende element van A en k het rangnummer van a. Geven wij nu aan b eveneens het rangnummer k, dan ziet men onmiddellijk, dat op deze wijze de verzameling B op die der natuurlijke getallen wordt afgebeeld, waarbij de stelling bewezen is.

§ **6.** **Stelling.** *Een deelverzameling van een aftelbare verzameling is òf eindig òf aftelbaar.*

Zij A een aftelbare verzameling en B een deelverzameling van A. Zij b een element van B en k het rangnummer, dat b als element van A bezit. Onder de $(k-1)$ elementen van A met lagere rangnummers dan k zijn er een bepaald aantal, die tot B behooren; zij l dit aantal. Geven wij nu aan b het rangnummer $(l+1)$, dan wordt op deze wijze de verzameling B òf afgebeeld op de verzameling der natuurlijke getallen òf (zoo er een element van B met grootste rangnummer n is) op de verzameling der natuurlijke getallen, die $\leqq n$ zijn. In het eerste geval is de verzameling aftelbaar, in het tweede geval eindig.

§ **7.** Laten eindig of oneindig vele verzamelingen $A, B, C \ldots.$ gegeven zijn. Wij kunnen nu een nieuwe verzameling V vormen, die tot elementen heeft alle dingen, welke tot minstens één der gegeven verzamelingen behooren. Deze verzameling heet de **vereeniging** der gegeven verzamelingen. Men schrijft:

$$V = A \dot{+} B \dot{+} C \dot{+} \ldots..$$

Hebben de gegeven verzamelingen twee aan twee genomen geen enkel element gemeen, dan heet V de **som** der gegeven verzamelingen, en schrijft men ook

$$V = A + B + C + \ldots..$$

Stelling. *De vereeniging van aftelbaar vele aftelbare verzamelingen is weer aftelbaar.*

Wij bewijzen de stelling eerst voor een **som** van aftelbaar vele aftelbare verzamelingen. Daar het aantal der verzamelingen aftelbaar oneindig is, kan men elk der verzamelingen een bepaald rangnummer geven; hetzelfde geldt voor de elementen van elk der verzamelingen. Ieder element wordt zoo door twee

indices volkomen bepaald. Er bestaat dus een ééneénduidige correspondentie tusschen de elementen van de som en de paren natuurlijke getallen. Daar deze laatsten volgens § 4 een aftelbare verzameling vormen, geldt volgens de stelling van § 5 hetzelfde voor de elementen van de beschouwde som.

Zijn er elementen, die tot twee of meer der gegeven verzamelingen behooren, dan behooren bij zulk een element twee of meer paren indices. Voegt men aan zulk een element in het bijzonder dàt paar indices toe, dat bij de rangschikking van § 4 het eerst aan de beurt komt, dan wordt de beschouwde vereeniging afgebeeld op een deel van de verzameling der paren natuurlijke getallen; volgens de stellingen van § 6 en § 5 is zij ook dan aftelbaar.

Zijn er slechts *eindig* vele verzamelingen, of bevatten sommige of alle gegeven verzamelingen slechts *eindig* vele elementen, of doen beide omstandigheden zich voor, dan zijn er paren indices waaraan geen enkel element is toegevoegd. Ook dan wordt de vereeniging op een deel der verzameling van de paren natuurlijke getallen afgebeeld en is zij dus aftelbaar, wanneer zij niet eindig is. O. a. is de vereeniging aftelbaar, als minstens één der gegeven verzamelingen aftelbaar is.

§ 8. Uit de uitkomsten der laatste paragrafen kunnen wij enkele belangrijke gevolgtrekkingen afleiden.

Stelling. *De verzameling van alle geheele getallen is aftelbaar.*

Deze verzameling is n.l. de vereeniging van de drie volgende verzamelingen:

1⁰. de verzameling der natuurlijke getallen.

2⁰. de verzameling der negatieve geheele getallen. Deze is aftelbaar, daar men aan ieder negatief geheel getal zijn volstrekte waarde als rangnummer kan toevoegen.

3⁰. het getal nul.

De verzameling der geheele getallen is dus de som van twee aftelbare verzamelingen en een eindige verzameling, en dus volgens de vorige par. aftelbaar.

§ 9. **Stelling.** *De verzameling van alle meetbare getallen is aftelbaar.*

Wij zullen dit eerst aantoonen voor de verzameling der positieve meetbare getallen. Elk zoodanig getal kan geschreven worden als een onvereenvoudigbare breuk, waarvan teller en noemer natuurlijke getallen zijn. Voegt men het meetbare getal nu toe aan het getallenpaar, gevormd door teller en noemer, dan wordt de verzameling der positieve meetbare getallen afgebeeld op een deel der verzameling van de paren natuurlijke getallen. Daar deze

laatste verzameling aftelbaar is, geldt dit ook voor de beschouwde verzameling.

Rangschikt men de positieve, meetbare getallen op dezelfde wijze als dit in § 4 met de correspondeerende getallenparen geschied is, dan krijgt men de volgende rangschikking:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{1}{5}, \text{ enz.}$$

De verzameling der *negatieve* meetbare getallen is eveneens aftelbaar, daar men elk negatief meetbaar getal kan toevoegen aan het positieve getal, dat er het tegengestelde van is.

De verzameling van *alle* meetbare getallen is nu de som van de twee genoemde verzamelingen en van de verzameling, die uit het getal nul bestaat; zij is dus eveneens aftelbaar.

VRAAGSTUKKEN.

6. Toon aan, dat de verzameling van alle paren meetbare getallen aftelbaar is.

7. Toon aan, dat de verzameling van alle groepen van p meetbare getallen aftelbaar is, wanneer p een gegeven natuurlijk getal is.

8. Toon aan, dat de verzameling van alle verzamelingen, die uit een eindig aantal meetbare getallen bestaan, aftelbaar is.

9. Indien een aftelbare verzameling A de som is van oneindig vele niet-leege verzamelingen, is het aantal van die verzamelingen aftelbaar.

Men voege aan elk der genoemde verzamelingen het rangnummer toe van dat element van A, dat in die verzameling voorkomt en het laagste rangnummer heeft.

10. Bewijs, dat het rangnummer van $\frac{1}{n}$ is: $1 + \sum_{k=2}^{k=n} \varphi(k)$, waarin $\varphi(k)$ de uit de Rekenkunde bekende indicator van k is.

11. Bij de boven gegeven rangschikking der positieve meetbare getallen moet men, om het rangnummer van een bepaald getal te vinden, eerst de rangnummers van alle voorafgaande getallen bepalen. Bij de volgende afbeelding van de positieve echte breuken op de natuurlijke getallen doet zich dit bezwaar niet voor.

Men toone aan, dat elke positieve echte breuk geschreven kan worden in de gedaante:

$$\frac{a_1}{2!} + \frac{a_2}{3!} + \ldots\ldots \frac{a_n}{(n+1)!} = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{a_p}{(p+1)!}$$

waarin steeds $0 \leqq a_p \leqq p$ is.

Men toone verder aan, dat ieder natuurlijk getal geschreven kan worden in de gedaante:

$$b_1 \,.\, 1! + b_2 \,.\, 2! + \ldots\ldots + b_n \,.\, n! = \sum_{p=1}^{p=n} b_p \,.\, p!$$

waarin steeds $0 \leqq b_p \leqq p$ is.

Voegt men nu een breuk en een natuurlijk getal aan elkaar toe, wanneer voor elke waarde van $p : a_p = b_p$, dan verkrijgt men de genoemde afbeelding.

(Faber. Math. Annalen. vol LX p. 196, geciteerd door Hobson, theory of functions of a real variable, pag. 80).

§ **10.** De vraag rijst, of er oneindige verzamelingen bestaan, die *niet aftelbaar* zijn. Een antwoord hierop wordt gegeven door de volgende stelling, die, evenals de voorafgaande, afkomstig is van G. CANTOR.

Stelling. *De verzameling van alle reëele getallen is niet aftelbaar.*

Het is natuurlijk voldoende, indien men deze stelling bewijst voor een deelverzameling van de verzameling der reëele getallen; want, was de geheele verzameling aftelbaar, dan zou elke oneindige deelverzameling dit ook moeten zijn. Wij kiezen hiertoe de verzameling der reëele getallen tusschen 0 en 1.

Wij bewijzen de stelling nu, door aan te toonen, dat, wanneer een aftelbare verzameling van reëele getallen tusschen 0 en 1 gegeven is, men altijd een reëel getal tusschen 0 en 1 kan vinden, dat niet tot die verzameling behoort. Het is dus onmogelijk, dat zulk een verzameling alle reëele getallen tusschen 0 en 1 bevatten zou.

Zij dus een aftelbare verzameling van reëele getallen tusschen 0 en 1 gegeven. Wij denken ons elk van die getallen voorgesteld door een oneindig voortloopende decimale breuk, wier decimalen niet van een bepaald rangnummer af uitsluitend 9 zijn; wel kan de breuk van zeker cijfer af niets dan nullen bevatten. Wij construeeren nu een nieuwe zoodanige, oneindig voortloopende, decimale breuk op de volgende wijze:

Indien het k-de cijfer van het k-de getal van onze aftelbare verzameling geen 1 is, is het k-de cijfer van onze nieuwe breuk een 1. Is het k-de cijfer van de k-de breuk een 1, dan is het k-de cijfer van onze nieuwe breuk een 2.

Het is duidelijk, dat door deze regels alle cijfers van onze nieuwe breuk volkomen bepaald zijn. Verder ziet men, dat deze breuk niet tot de gegeven verzameling kan behooren, daar zij van elke breuk van de verzameling minstens in één cijfer verschilt.

Voor een verdere studie van de wijze, waarop men de niet aftelbare verzamelingen classificeert, verwijzen wij den lezer naar het hoofdstuk over „Oneindige hoeveelheden en Cardinaalgetallen" in het *Leerboek der Theoretische Rekenkunde* van Prof. Dr. F. SCHUH.

§ **11.** Voor de verdere beschouwingen is het gewenscht, de verzameling der reëele getallen uit te breiden door hieraan twee symbolen toe te voegen. Dit zijn de symbolen $+\infty$ en $-\infty$. In tegenstelling tot deze symbolen heeten de reeds bekende reëele getallen **eindige** reëele getallen.

Het werken met deze symbolen wordt door de volgende definitie's vastgelegd:

1^0. Is a een eindig reëel getal, dan is:

$$-\infty < a < +\infty.$$

2^0. Voor de optelling gelden de volgende regels:

$$+\infty + a = a + \infty = +\infty$$
$$-\infty + a = a - \infty = -\infty$$
$$+\infty + \infty = +\infty$$
$$-\infty - \infty = -\infty.$$

De optelling $+\infty - \infty$ wordt niet gedefiniëerd, zoodat wij deze bewerking nooit zullen toepassen.

§ 12. We zullen thans enkele begrippen bespreken, die betrekking hebben op verzamelingen, waarvan de elementen *reëele getallen* zijn.

Een getallenverzameling A heet **naar boven begrensd,** indien er eindige getallen bestaan, die door geen enkel getal van A overtroffen worden.

Bestaat er één zoodanig getal, dan bestaan er ook oneindig vele; immers, is b een eindig getal, dat door geen enkel getal van A overtroffen wordt, dan zal ieder getal, dat grooter dan b is, dezelfde eigenschap bezitten.

Een getallenverzameling A heet **naar beneden begrensd,** indien er eindige getallen bestaan, die geen enkel getal van A overtreffen.

Men ziet onmiddellijk weer, dat, als er één zoodanig getal bestaat, er oneindig vele zijn.

VRAAGSTUKKEN.

12. Bewijs, dat een getallenverzameling A naar boven begrensd is, indien er minstens één eindig getal bestaat, dat slechts door een eindig aantal getallen van A overtroffen wordt.

Formuleer en bewijs de overeenkomstige stelling voor naar beneden begrensde getallenverzamelingen.

13. Is de getallenverzameling A naar boven begrensd en bevat zij minstens één eindig getal, dan is de verzameling der getallen, die door geen enkel getal van A overtroffen worden, naar beneden begrensd.

Formuleer en bewijs ook de overeenkomstige stelling voor naar beneden begrensde getallenverzamelingen.

§ 13. Is een getallenverzameling A naar boven begrensd, dan is het niet noodzakelijk, dat één der getallen van A het grootste is. Dit blijkt onmiddellijk als men de verzameling beschouwt van de getallen die kleiner dan 1 zijn.

Evenmin behoeft onder de getallen van een naar boven begrensde verzameling één het kleinste te wezen.

In de leer der onmeetbare getallen bewijst men nu echter de volgende stelling:

Stelling. *Is A een naar boven begrensde niet leege getallenverzameling, dan bevat de verzameling der getallen, die door geen enkel getal van A overtroffen worden, een kleinste getal.*

Dit kleinste getal noemt men de **bovenste grens** van de verzameling A. Door de stelling toe te passen op de verzameling van de tegengestelden der getallen eener getallenverzameling vindt men:

Stelling. *Is A een naar beneden begrensde, niet leege getallenverzameling, dan bevat de verzameling der getallen, die geen enkel getal van A overtreffen, een grootste getal.*

Dit grootste getal noemt men de **onderste grens** van de verzameling A.

Door de volgende aanvullende definities bereiken wij, dat **elke** getallenverzameling een bovenste en een onderste grens bezit.

Is A niet naar boven begrensd, dan noemt men $+\infty$ haar bovenste grens. Dit is b. v. het geval, indien $+\infty$ zelf een getal van A is.

Is A niet naar beneden begrensd, dan noemt men $-\infty$ haar onderste grens. Dit is b. v. het geval, indien $-\infty$ zelf een getal van A is.

VRAAGSTUKKEN.

14. Bewijs het bestaan van de bovenste grens eener naar boven begrensde en niet leege getallenverzameling A met behulp van de theorie der sneden van **Dedekind.**

Hiertoe rangschikke men in één klasse de meetbare getallen, die door minstens één getal van A overtroffen worden, en in een tweede klasse alle overige meetbare getallen. Men toone aan, dat op deze wijze in de verzameling der meetbare getallen een snede verkregen wordt en dat het door deze snede gedefiniëerde getal juist de gezochte bovenste grens is.

Op analoge wijze toone men het bestaan van de onderste grens aan.

15. Bepaal de bovenste en de onderste grens van de verzameling der getallen van den vorm $2^{-m} + 3^{-n}$ waarin m en n natuurlijk getallen zijn.

16. Doe hetzelfde voor de verzameling der getallen van den vorm $2^{-m} - 3^{-n}$.

17. Zij A een verzameling reëele getallen en B eveneens. Indien elk getal b van B minstens één getal a van A niet overtreft, is de bovenste grens van B niet grooter dan die van A.

In het bijzonder volgt hieruit, dat de bovenste grens van een deelverzameling van A niet grooter dan die van A is.

Formuleer en bewijs de overeenkomstige stellingen voor de onderste grens.

18. Bewijs, dat de bovenste grens van een getallenverzameling niet kleiner is dan de onderste grens. Kunnen beide grenzen gelijk zijn?

19. Bewijs, dat de bovenste grens van de vereeniging van eindig of oneindig vele niet leege getallenverzamelingen de bovenste grens van de bovenste grenzen dier verzamelingen is.

§ 14. Zij volgens een zekere wet aan ieder natuurlijk getal k een reëel getal a_k toegevoegd. Deze getallen a_k vormen dan een **getallenrij**. Onder een **element** van de rij verstaan wij een getal a_k, waarbij men niet alleen let op dit getal, maar ook op den index k. Twee elementen van de rij zijn dus verschillend, wanneer de bijbehoorende indices k verschillend zijn; de getallen a_k zelf kunnen dan zeer wel aan elkander gelijk zijn.

Zij b.v.: $a_k = 0$ voor k oneven,
$a_k = 1$ voor k even.

In dit geval zijn de getallen a_k met oneven index alle aan elkander gelijk; als elementen van de getallenrij beschouwd zijn zij echter verschillend.

Zij A_m de getallenverzameling, die gevormd wordt door de getallen, die gelijk zijn aan eenig getal a_k met index $k \geqq m$. Zij G_m de bovenste grens van A_m. Is m' grooter dan m, dan is $A_{m'}$ een deel van A_m, waaruit volgt, dat $G_{m'} \leqq G_m$ is.

De onderste grens van de verzameling der getallen G_m heet de **bovenste limiet** van de rij a_k. Voor de zoo even genoemde getallenrij is deze bovenste limiet $= 1$.

Zij evenzoo g_m de onderste grens van A_m. Dan is voor $m' > m$, $g_{m'} \geqq g_m$. De bovenste grens van de verzameling der getallen g_m heet de **onderste limiet** van de rij der getallen a_k. Voor de zoo even genoemde getallenrij is deze onderste limiet $= 0$.

Stelling. *De bovenste limiet van een getallenrij a_k is niet kleiner dan de onderste limiet van de rij.*

Om dit te bewijzen merken we eerst op, dat een getal G_m niet kleiner kan zijn dan een getal g_p. Zijn nl. m en p gegeven, dan kan men een getal m' vinden, dat beide overtreft. Dan heeft men (zie vraagstuk 18):

$$g_p \leqq g_{m'} \leqq G_{m'} \leqq G_m.$$

Daar een getal G_m dus door geen enkel getal g_p overtroffen wordt, is G_m grooter dan of gelijk aan de bovenste grens der getallen g_p, dus grooter dan of gelijk aan de onderste limiet l van de gegeven rij.

Het getal l overtreft dus geen enkel getal G_m, het getal l is dus kleiner dan of gelijk aan de onderste grens van de getallen G_m, en dit is de bovenste limiet L van de gegeven rij.

VRAAGSTUKKEN.

20. Is L de bovenste limiet van een rij getallen a_k, en is ε een wille-

keurig positief getal, dan kan men steeds een index m vinden, zoodanig, dat men voor $k > m$ steeds heeft:

$$a_k \leqq L + \varepsilon$$

Formuleer en bewijs ook de overeenkomstige stelling voor de onderste limiet.

21. Bepaal de bovenste en de onderste limiet van de getallenverzameling, die in de vraagstukken 15 en 16 genoemd zijn, wanneer men elk van deze verzamelingen met behulp van § 4 in een aftelbare rij rangschikt.

22. Zij b een getal, dat slechts door een eindig aantal elementen van een gegeven getallenrij overtroffen wordt. Toon aan dat de bovenste limiet van de rij de onderste grens der getallen b is.

23. Wanneer men de getallen a_k op een andere wijze rangschikt, d. w. z. elk getal van een nieuwen index voorziet, zoodanig dat tusschen de oude en de nieuwe indices een ééneénduidig verband bestaat, dan blijven de bovenste en onderste limiet dezelfde.

24. Indien geen der elementen a_k van een getallenrij gelijk is aan $+\infty$, doch de verzameling der getallen a_k niet naar boven begrensd is, dan is de bovenste limiet van de getallenrij $+\infty$.

25. Zij gegeven een rij van getallen a_k en een rij van getallen b_k. Zij U de bovenste grens en L de bovenste limiet van de eerste rij en laten U' en L' de overeenkomstige grootheden voor de tweede rij zijn. Indien men nu de getallen a_k en b_l met behulp van § 4 in één rij rangschikt, dan heeft deze rij tot bovenste grens het getal $U + U'$ en tot bovenste limiet het grootste van de twee getallen $U + L'$ en $U' + L$.

Hierbij wordt ondersteld, dat elk der getallen $a_k + b_l$ een bepaalde waarde heeft, en dus niet gelijktijdig $a_k = +\infty$ en $b_l = -\infty$ kan zijn of omgekeerd. Hetzelfde wordt ondersteld omtrent de getallen $U + L'$ en $U' + L$.

26. Bestaat elk der rijen a_k en b_k van het vorige vraagstuk uit *eindige* getallen en is $U = L = +\infty$, dan zijn de bovenste grens en de bovenste limiet van de rij der getallen $a_k + b_l$ beide $+\infty$.

27. De bovenste limiet van een getallenrij is de bovenste grens van de bovenste limieten van alle rijen, die men door weglaten van elementen uit de gegeven rij kan krijgen.

§ 15. Zijn de bovenste en de onderste limiet van een rij getallen a_k gelijk aan elkander, dan heet de getallenrij **convergent.** De gemeenschappelijke waarde van de bovenste en de onderste limiet heet de limiet van de getallenrij en wordt aangeduid door het teeken: $\lim\limits_{k=\infty} a_k$.

VRAAGSTUKKEN.

28. Bewijs: $\lim\limits_{k=\infty}(a_k + b_k) = \lim\limits_{k=\infty} a_k + \lim\limits_{k=\infty} b_k$, wanneer niet één van de twee limieten rechts $+\infty$ en de ander $-\infty$ is

29. Bewijs: $\lim\limits_{k=\infty} a_k b_k = \lim\limits_{k=\infty} a_k . \lim\limits_{k=\infty} b_k$, wanneer beide limieten rechts eindig zijn.

30. Bewijs: $\lim\limits_{k=\infty} \frac{1}{a_k} = \frac{1}{\lim\limits_{k=\infty} a_k}$, mits $\lim\limits_{k=\infty} a_k \neq 0$ en eindig.

§ **16.** Wij gaan thans over tot de leer der **puntverzamelingen**. *Onder een* **punt** *verstaan wij een groep van n eindige reëele getallen, in een bepaalde volgorde geplaatst.* Deze getallen kunnen we aanduiden door $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$. De verzameling van alle punten, die men krijgt door bij een gegeven waarde van n aan de getallen x_p alle mogelijke waarden te geven, heet een *n-dimensionale ruimte* en wordt voorgesteld door het symbool R_n.

De getallen x_p, die bij een punt P behooren, heeten de coördinaten van P.

Blijkens het voorafgaande is een punt van R_1 niets anders dan een reëel eindig getal. Zooals in de analytische meetkunde blijkt, kunnen de ruimten R_1, R_2 en R_3 geidentificeerd worden met de rechte lijn, het platte vlak en de driedimensionale ruimte der gewone meetkunde [1]). Wij zullen van deze identificaties alleen gebruik maken, als bij de behandeling van sommige voorbeelden een meetkundige beschrijving korter en duidelijker zijn mocht.

§ **17.** Laten gegeven zijn n reëele getallen a_p en n reëele getallen b_p, zoodanig dat voor elke waarde van p $a_p < b_p$ is. De verzameling van alle punten, welker coördinaten voldoen aan de betrekkingen:

$$a_p < x_p < b_p \quad (p = 1, 2, \ldots . n),$$

heet een **open interval**. De verzameling van alle punten, welker coördinaten voldoen aan de betrekkingen:

$$a_p \leqq x_p \leqq b_p \quad (p = 1, 2, \ldots . n),$$

heet een **gesloten interval**.

De punten die niet behooren tot het zooeven gedefiniëerde open interval, maar wel tot het gesloten interval, vormen de **begrenzing** van elk der beide intervallen. Bij een ééndimensionaal interval bestaat de begrenzing uit de beide punten $x = a_1$ en $x = b_1$. Deze heeten de **eindpunten** van het interval. De n reëele getallen $b_p - a_p$ heeten de **lengten** van elk der beide intervallen. Het punt met de coördinaten $x_p = {}^1/_2 (a_p + b_p)$ heet het **middelpunt** van elk der beide intervallen. De punten van een interval, die niet tot de begrenzing behooren, heeten **inwendige punten**.

Zijn de n lengten van een interval alle aan elkander gelijk, dan heet het interval een **kubus**; deze kan dus open of gesloten zijn.

Stelling. *Behooren twee punten met de coördinaten x_p en y_p tot een zelfde interval, dan heeft men voor elke waarde van p:*

$$| x_p - y_p | \leqq b_p - a_p.$$

---

1) Zie het Leerboek der Analytische Meetkunde van PROF. DR. J. A. BARRAU, hoofdstuk 1.

De stelling volgt onmiddellijk uit de zoowel voor een open als voor een gesloten interval gevonden betrekkingen:

$$a_p \leqq x_p \leqq b_p \quad (p = 1, 2, \ldots . n)$$

$$a_p \leqq y_p \leqq b_p \quad (p = 1, 2, \ldots . n)$$

§ 18. **Stelling.** *Indien van twee intervallen het eerste het middelpunt van het tweede bevat en elke lengte van het eerste kleiner is dan de helft van de overeenkomstige lengte van het tweede, dan is het eerste een deel van het tweede.*

Laten a_p en b_p de definiëerende getallen zijn van het eerste interval, a'_p en b'_p die van het tweede. De stelling zal bewezen zijn, wanneer aangetoond is:

$$a'_p < a_p < b_p < b'_p \quad (p = 1, 2, \ldots . n) \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Immers, dan zal ieder punt, dat aan de definiëerende betrekkingen van het eerste interval voldoet, ook voldoen aan die van het tweede interval.

Uit het gegevene volgen nu de betrekkingen:

$$a_p \leqq \tfrac{1}{2}(a'_p + b'_p) \leqq b_p \quad (p = 1, 2, \ldots . n) \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$b_p - a_p < \tfrac{1}{2}(b'_p - a'_p) \quad (p = 1, 2, \ldots . n) \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Men heeft nu:

$$a'_p = \tfrac{1}{2}(a'_p + b'_p) - \tfrac{1}{2}(b'_p - a'_p).$$

Wegens (2) en (3) volgt hieruit:

$$a'_p < b_p - (b_p - a_p) = a_p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Evenzoo heeft men:

$$b'_p = \tfrac{1}{2}(a'_p + b'_p) + \tfrac{1}{2}(b'_p - a'_p).$$

Wegens (2) en (3) volgt hieruit:

$$b'_p > a_p + (b_p - a_p) = b_p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Daar de betrekkingen (4) en (5) te zamen de betrekking (1) geven, is de stelling hiermede bewezen.

§ 19. Laten gegeven zijn n eindige verzamelingen van eindige reëele getallen, die ieder uit minstens twee getallen bestaan. De getallen van elke verzameling denken wij ons zoo gerangschikt, dat telkens een voorafgaand getal kleiner is dan een volgend. Wanneer wij het k-de getal van de p-de verzameling aanduiden als $c_p^{(k)}$, dan heeft men:

$$c_1^{(1)} < c_1^{(2)} < \ldots\ldots < c_1^{(m_1)}$$
$$c_2^{(1)} < c_2^{(2)} < \ldots\ldots < c_2^{(m_2)}$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$c_n^{(1)} < c_n^{(2)} < \ldots\ldots < c_n^{(m_n)}$$

Hieruit zijn $m_1, m_2, \ldots. m_n$ de aantallen getallen van de opvolgende verzamelingen.

De verzameling van alle gesloten intervallen, die men krijgen kan door in de betrekkingen:

$$a_p \leqq x_p \leqq b_p \quad (p = 1, 2, \ldots. n)$$

voor a_p en b_p twee onmiddellijk op elkaar volgende getallen uit de p-de gegeven verzameling te nemen, heet een **net** van gesloten intervallen. Het aantal dezer intervallen bedraagt klaarblijkelijk

$$(m_1 - 1)\ (m_2 - 1)\ \ldots\ldots\ (m_n - 1).$$

Al deze intervallen zijn deelen van het interval:

$$c_p^{(1)} \leqq x_p \leqq c_p^{(m_p)} \quad (p = 1, 2, \ldots\ldots n).$$

Omgekeerd behoort ieder punt van het interval tot minstens één interval van het net.

Opdat zulk een punt *inwendig* punt van een interval van het net zij, is noodzakelijk en voldoende, dat voor geen enkele waarde van p de coördinaat x_p van het punt aan een der getallen van de p-de verzameling gelijk is. Men ziet onmiddellijk, dat een punt, dat inwendig punt is van een der intervallen van het net, tot geen enkel ander interval van het net behoort.

§ 20. Wij zullen ook netten beschouwen, die uit oneindig vele intervallen bestaan. Hiertoe diene eerst het volgende:

Laten A en B twee getallenverzamelingen zijn, die eeneenduidig op elkaar kunnen worden afgebeeld. Laten a en a' twee getallen van A zijn, en b en b' de getallen van B, die bij een zekere afbeelding met a en a' correspondeeren.

Is het nu mogelijk de afbeelding zoo te kiezen, dat $a > a'$ steeds $b > b'$ volgt, dan zegt men. dat de verzamelingen A en B het zelfde **ordetype** hebben. Van bijzonder belang zijn nu voor ons de getallenverzamelingen, die het ordetype hebben van de verzameling der *geheele getallen*. Voorbeelden van dergelijke getallenverzamelingen zijn:

$$\ldots\ldots -\tfrac{15}{16}, -\tfrac{7}{8}, -\tfrac{3}{4}, -\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{7}{8}, \tfrac{15}{16}, \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots -\tfrac{15}{16}, -\tfrac{7}{8}, -\tfrac{3}{4}, -\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}, 1\tfrac{1}{2}, 2\tfrac{1}{2}, 3\tfrac{1}{2}, \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots -3\tfrac{1}{2}, -2\tfrac{1}{2}, -1\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}, 1\tfrac{1}{2}, 2\tfrac{1}{2}, 3\tfrac{1}{2}, \ldots\ldots$$

De eerste van deze verzamelingen is zoowel naar boven als naar beneden begrensd, de tweede alleen naar beneden, de derde noch naar boven noch naar beneden.

Laten nu n getallenverzamelingen gegeven zijn, die elk het ordetype hebben van de verzameling der geheele getallen en noch naar boven noch naar beneden begrensd zijn. Indien wij het getal van de p-de verzameling, dat aan het geheele getal k is toegevoegd, weer aanduiden als $c_p^{(k)}$, dan heeft men:

$$\ldots c_1^{(-2)} < c_1^{(-1)} < c_1^{(0)} < c_1^{(1)} < c_1^{(2)} < \ldots$$
$$\ldots c_2^{(-2)} < c_2^{(-1)} < c_2^{(0)} < c_2^{(1)} < c_2^{(2)} < \ldots$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$\ldots c_n^{(-2)} < c_n^{(-1)} < c_n^{(0)} < c_n^{(1)} < c_n^{(2)} < \ldots$$

De verzameling van alle gesloten intervallen, die men krijgen kan door in de betrekkingen

$$a_p \leqq x_p \leqq b_p \quad (p = 1, 2 \ldots . n)$$

voor a_p en b_p twee onmiddellijk op elkaar volgende getallen uit de p-de gegeven verzameling te nemen, heet weer een **net** van gesloten intervallen.

Men ziet onmiddellijk de volgende eigenschappen:

1. Ieder punt der ruimte behoort tot minstens één interval van het net.

2. Ieder punt der ruimte kan slechts tot een eindig aantal intervallen van het net behooren, en wel hoogstens tot 2^n.

3. Een punt, dat inwendig punt is van één der intervallen van het net, kan tot geen enkel ander interval van het net behooren.

Een eenvoudig voorbeeld krijgt men door voor elk der n gegeven verzamelingen de verzameling der geheele getallen te nemen, dus $c_p^{(k)} = k$ te stellen. Het net bestaat dan uit kubussen, waarvan alle lengten $= 1$ zijn.

In het algemeen zullen wij van de door ons beschouwde netten steeds onderstellen, dat de lengten der intervallen van het net een begrensde getallenverzameling vormen. In het zooeven genoemde voorbeeld is hieraan voldaan.

§ **21.** Laat, evenals in de beide vorige paragrafen, een net van intervallen door n getallenverzamelingen gedefiniëerd zijn. Wij zullen dit net aanduiden door N_1. Tusschen elke twee opeenvolgende getallen van elk der n verzamelingen denken wij ons een eindig aantal getallen ingevoegd, zoodanig, dat de verzameling, die gevormd wordt door de oorspronkelijk gegeven

getallen tezamen met de ingevoegde, evenzoo gerangschikt is als de verzameling der oorspronkelijk gegeven getallen.

Zijn dus $c_p^{(k)}$ en $c_p^{(k+1)}$ twee opeenvolgende getallen van de p-de verzameling, dan voldoen de daartusschen ingevoegde getallen aan de betrekkingen:

$$c_p^{(k)} < c_p^{(k,\,1)} < c_p^{(k,\,2)} < \ldots . < c_p^{(k,\,m_{pk})} < c_p^{(k+1)}$$

Het aantal m_{pk} der ingevoegde getallen zal in het algemeen van p en van k afhangen. Het kan ook wel voor sommige waarden van p en k nul zijn.

De n getallenverzamelingen, die elk bestaan uit één der oorspronkelijk gegeven verzamelingen tezamen met de daarbijgevoegde getallen, bepalen een nieuw net van intervallen, dat wij door N_2 zullen aanduiden.

Men zegt, dat het net N_2 een **onderverdeeling** is van het net N_1. Elk interval van N_2 is blijkbaar een deel van een interval van N_1; elk punt, dat tot een interval van N_1 behoort, behoort tot minstens één interval van N_2; elk punt, dat inwendig punt is van een interval van N_2, is ook inwendig punt van een interval van N_1.

Uit het net N_2 kan men op analoge wijze een net N_3 afleiden, dat dan natuurlijk ook een onderverdeeling van N_1 is. Gaat men volgens een bepaalde regel op deze wijze voort, dan geraakt men tot een aftelbare verzameling of **rij** van netten N_k, waarvan ieder een onderverdeeling van alle voorafgaande is.

Een eenvoudig voorbeeld is het volgende:

Voor elk der n definiëerende getallenverzamelingen van het net N_1 nemen we de verzameling der geheele getallen. Voor elk der n definiëerende getallenverzamelingen van het net N_k nemen wij de verzameling der getallen, die men kan schrijven als breuken, waarvan de noemer 10^k is. Het net N_k bestaat dan uit kubussen, waarvan elk der lengten 10^{-k+1} is.

In het algemeen zullen wij, wanneer wij een dergelijke verzameling van netten beschouwen, steeds onderstellen, dat de bovenste grens van de lengten der intervallen van het net N_k de limiet 0 heeft, wanneer k toeneemt.

In het zooeven genoemde voorbeeld is hieraan voldaan.

Men ziet verder gemakkelijk, dat, wanneer een net N_2 een onderverdeeling is van een net N_1, en een interval van N_2 een inwendig punt gemeen heeft met een interval van N_1, het eerste interval een deel van het tweede moet zijn.

§ **22.** Zij gegeven een aftelbare verzameling van netten N_k, waarvan ieder een onderverdeeling is van alle voorafgaande. Zij

I_1 een interval van het net N_1; zij I_2 een van de intervallen van N_2, die een deel van I_1 zijn; zij I_3 een van de intervallen van N_3, die een deel van I_2 zijn; enz. Op deze wijze verkrijgt men, als men volgens een bepaalde regel doorgaat, een aftelbare verzameling van gesloten intervallen I_k, waarvan ieder een deel is van alle voorafgaande.

Voor een dergelijke verzameling van intervallen bewijzen we nu de volgende

Stelling. *Is een aftelbare verzameling van gesloten intervallen gegeven, waarvan ieder een deel van alle voorafgaande is, dan bestaat er minstens één punt, dat tot alle intervallen van de verzameling behoort.*

Zij het interval I_k gedefiniëerd door de betrekkingen:

$$a_p^{(k)} \leqq x_p \leqq b_p^{(k)} \quad (p = 1, 2, \ldots n) \quad \ldots \quad (1)$$

Uit het gegevene volgt nu:

$$a_p^{(k)} \leqq a_p^{(k+1)} < b_p^{(k+1)} \leqq b_p^{(k)} \quad (p = 1, 2, \ldots n) \quad \ldots \quad (2)$$

Zij ξ_p de bovenste grens van de getallen $a_p^{(k)}$, $(k = 1, 2, \ldots n)$; voor elke waarde van k is dan:

$$a_p^{(k)} \leqq \xi_p \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Uit de betrekkingen (1) en (2) volgt gemakkelijk, dat elk getal $b_p^{(k)}$ door geen enkel getal $a_p^{(l)}$ overtroffen wordt, dus ook niet door het getal ξ_p (volgens de de definitie van „bovenste grens"). Men heeft m. a. w. voor elke waarde van k:

$$\xi_p \leqq b_p^{(k)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

De betrekkingen (3) en (4) leeren, dat het punt met de coördinaten ξ_p tot alle intervallen I_k behoort, waarmede de stelling bewezen is.

Indien de intervallen I_k verkregen zijn met behulp van een verzameling van netten N_k, zooals dit in het begin van deze paragraaf verondersteld werd, zullen alle lengten van I_k bij toename van k tot 0 naderen; volgens de onderstelling, die aan het eind van de vorige paragraaf gemaakt is. In dit geval is er slechts één punt, dat tot alle intervallen I_k behoort. Was er n.l. nog een tweede punt met de coördinaten η_p, dan zou volgens de stelling van § 16 de p^{de} lengte van I_k niet kleiner kunnen zijn dan het bedrag $|\xi_p - \eta_p|$. Daar de bedragen $|\xi_p - \eta_p|$ niet alle gelijk 0 zouden zijn, zou dit met het tot *nul* naderen van de lengten in strijd zijn.

Is een aftelbare verzameling van *open* intervallen gegeven, waarvan ieder een deel van alle voorafgaande is, dan behoeft er geen punt te zijn, dat tot alle intervallen van de verzameling

behoort. Dit is bijv. het geval met de één-dimensionale intervallen, die door de betrekkingen:

$$0 < x < \frac{1}{k}$$

gedefiniëerd zijn.

VRAAGSTUKKEN.

31. Is een aftelbare verzameling van één-dimensionale, gesloten intervallen I_k gegeven, waarvan ieder een deel is van alle voorafgaande, en nadert de lengte van I_k bij toename van k niet tot nul, dan vormen de punten, die tot alle intervallen I_k behooren, weer een gesloten interval.

Hoe luidt de overeenkomstige stelling voor meer-dimensionale intervallen?

32. Zij een één-dimensionaal gesloten interval gedefiniëerd door de betrekkingen:

$$a \leqq x \leqq b$$

Het interval $a \leqq x \leqq {}^1/_2\,(a+b)$ heet de *linkerhelft* van het gegeven interval, het interval ${}^1/_2\,(a+b) \leqq x \leqq b$ heet de *rechterhelft* van het gegeven interval.

Van het interval $0 \leqq x \leqq 1$ neemt men de rechterhelft, hiervan de linkerhelft, daarvan weer de rechterhelft, daarvan weer de linkerhelft, enz. Wat is het punt, dat tot al deze intervallen behoort?

§ 23. In § 16 zijn de begrippen „open interval" „gesloten interval" en „inwendig punt van een interval" gedefiniëerd. Wij zullen deze begrippen thans tot willekeurige puntverzamelingen uitbreiden.

Een punt P heet een **inwendig punt** van een puntverzameling A, als er een open interval bestaat, dat P bevat en een deel van A is.

Is de puntverzameling A zelf een interval, dan is deze definitie in overeenstemming met de vroegere; immers voor het genoemde interval kan men dan het open interval nemen, dat door dezelfde getallen als A gedefiniëerd wordt.

Stelling. *Is P een inwendig punt van een puntverzameling A, dan bestaat er steeds een interval, dat P tot middelpunt heeft, en waarvan alle punten tot A behooren.*

Laten ξ_p de coördinaten van P zijn. Daar P een inwendig punt van A is, bestaat er een open interval, dat P bevat en waarvan alle punten tot A behooren. Zij dit interval gedefiniëerd door de betrekkingen:

$$a_p < x_p < b_p \quad (p = 1, 2, \ldots . n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Men heeft dan dus:

$$a_p < \xi_p < b_p \quad (p = 1, 2, \ldots . n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Zij λ het kleinste van de $2n$ getallen $\xi_p - a_p$ en $b_p - \xi_p$.

Indien nu een punt voldoet aan de betrekkingen:

$$\xi_p - \lambda < x_p < \xi_p + \lambda \ (p = 1, 2, \ldots . \ n). \quad . \quad . \quad (3)$$

dan zal het ook voldoen aan de betrekkingen (1). De laatste betrekkingen definiëeren een interval, dat P tot middelpunt heeft en waarvan alle punten behooren tot het eerstgenoemde interval, dus ook tot A. Uit deze stelling leiden wij nu de volgende af:

Stelling. *Is een aftelbare rij van netten N_k gegeven, waarvan ieder een onderverdeeling van alle voorafgaande is, en die voldoen aan de veronderstelling van § 20, en is P een inwendig punt van een puntverzameling A, dan kan men steeds een index k vinden zoodanig, dat ieder interval van N_k, dat P bevat, geheel tot A behoort.*

Volgens het bovenstaande kan men namelijk een interval I vinden, dat P tot middelpunt heeft en dat geheel tot A behoort. Volgens § 17 zal een interval, dat P bevat geheel tot I, dus ook tot A behooren, indien elke lengte van dit interval kleiner is dan de helft van de overeenkomstige lengte van I. Volgens de onderstelling van § 20 nadert de bovenste grens van de lengten van de intervallen van het net N_k tot nul, als k toeneemt. Er zal dus een waarde van k zijn, waarvoor deze bovenste grens kleiner is dan de helft van de kleinste lengte van I. Voor deze waarde van k zal klaarblijkelijk de stelling gelden.

§ **24.** Een puntverzameling A, die geen andere dan inwendige punten heeft, heet een **open puntverzameling.**

Daar alle punten van een open interval inwendige punten zijn, is het begrip „open interval" een bijzonder geval van het begrip „open puntverzameling".

Verder ziet men onmiddellijk, dat de leege puntverzameling en de geheele ruimte R_n beide open puntverzamelingen zijn.

Om op eenvoudige wijze andere voorbeelden van open puntverzamelingen te kunnen aangeven, diene het volgende.

Is volgens een zekere wet aan ieder punt van een puntverzameling A een reëel, eindig of oneindig getal toegevoegd, dan zegt men dat op A een **functie** gedefiniëerd is. Het getal, dat aan een punt P van A met de coördinaten $x_1, x_2, \ldots . \ x_n$ is toegevoegd, heet de **waarde** van de functie in het punt P. Het wordt aangeduid door een der welbekende symbolen $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$, $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ enz. In plaats van „de functie, welker waarde in het punt P door het symbool $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ wordt voorgesteld" zegt men kort weg: „de functie $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$".

Een functie $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ heet **continu** in een punt P, indien voldaan wordt aan de beide volgende voorwaarden:

1. De waarde van de functie in P is eindig.

2. Bij ieder positief getal ε bestaat er een interval, dat P tot inwendig punt heeft en de eigenschap bezit, dat voor ieder punt van het interval, dat tot A behoort, de waarde der functie minder dan ε van de waarde in P verschilt.

De lezer bewijze nu de volgende stelling:

Zij $f(x_1, x_2, .., x_n)$ een functie, die in ieder punt der ruimte R_n gedefiniëerd en continu is. Zijn dan a en b twee willekeurige reëele getallen, dan vormen de punten, die voldoen aan de betrekking:

$$a < f(x_1, x_2, .., x_n) < b$$

een open puntverzameling. Hij geve met behulp van deze stelling eenige voorbeelden van open puntverzamelingen.

VRAAGSTUKKEN.

33. Is een functie in ieder punt der ruimte gedefiniëerd en eindig, en vormen voor ieder paar getallen a en b de punten, die aan de bovengenoemde betrekking voldoen, een open puntverzameling, dan is de functie in ieder punt der ruimte continu.

34. Door de betrekkingen:

$$x_1 > 0, \ \sin\frac{1}{x_1} < x_2 < \sin\frac{1}{x_1} + x_1$$

wordt een puntverzameling in R_2 gedefiniëerd. De lezer bewijze, dat deze puntverzameling open is en geve zich door een figuur van haar gedaante rekenschap.

35. Men doe hetzelfde voor de puntverzameling, die gedefiniëerd wordt door de ongelijkheden:

$$\theta > 0, \ 1 + \frac{1}{\theta^2 + 2} < \varrho < 1 + \frac{1}{\theta^2 + 1}.$$

Hierin zijn θ en ϱ poolcoördinaten in het platte vlak en kan θ ook waarden aannemen, die $> 2\pi$ zijn.

§ 25. Een punt P heet een **verdichtingspunt** van een puntverzameling A, indien elk interval dat P tot inwendig punt heeft, minstens een punt Q bevat, dat tot A behoort en niet met P samenvalt. Of P zelf een punt van A is, doet hierbij niets ter zake.

Men ziet onmiddellijk, dat een inwendig punt van een puntverzameling tevens een verdichtingspunt van de verzameling is. Het omgekeerde is echter niet waar.

Stelling. *Is P een verdichtingspunt van een puntverzameling A, dan bevat ieder interval, dat P tot inwendig punt heeft, oneindig veel punten van A.*

Zij I_1 een willekeurig gesloten interval, dat P tot inwendig

punt heeft. Evenals in § 20 beschouwen wij een aftelbare verzameling van netten N_k, waarvan ieder een onderverdeeling van alle voorafgaande is. Het net N_1 besta uit het enkel interval I_1. Wij zorgen tevens, dat het punt P telkens een inwendig punt is van een interval I_k van het net N_k.

Zij Q een punt van A, dat tot I_1 behoort en niet met P samenvalt. Volgens § 21 is P het eenige punt, dat tot alle intervallen I_k behoort. Er bestaat dus een index m, zoodanig, dat voor $k > m$ het interval I_k het punt Q niet meer bevat.

Bevatte het interval I_1 nu slechts een eindig aantal punten Q van A, dan zal men daarbij een eindig aantal indices m kunnen vinden. Was nu k grooter dan al deze getallen m, dan zal I_k geen enkel punt van A meer bevatten. Dit is in strijd met de ondersteiling, dat P verdichtingspunt van A is.

Om de stelling te bewijzen voor een *open* interval, dat P bevat, neemt men voor I_1 een gesloten interval, dat P tot inwendig punt heeft en een deel van het eerstgenoemde interval is.

§ 26. Een puntverzameling heet **begrensd,** indien er een interval bestaat, waartoe alle punten van de verzameling behooren. Dit interval kan blijkbaar gesloten ondersteld worden.

Stelling van Bolzano en Weierstrass. *Indien een begrensde puntverzameling uit oneindig vele punten bestaat heeft de verzameling minstens één verdichtingspunt.*

Zij I_1 een gesloten interval, waartoe de gegeven puntverzameling A behoort. Wij construeeren weer een aftelbare verzameling van netten N_k, waarvan ieder een onderverdeeling van alle voorafgaande is en waarvan het eerste uit het enkel interval I_1 bestaat.

Onder de intervallen van het net N_2 moet er minstens één zijn, dat oneindig vele punten van A bevat. Immers, deze intervallen zijn in eindig aantal aanwezig en hun vereeniging is het interval I_1; zouden zij dus elk slechts een eindig aantal punten van A bevatten, dan zou hetzelfde voor het geheele interval I_1 gelden.

Onder de intervallen van N_2 die oneindig vele punten van A bevatten, kiezen wij nu een bepaald interval uit. Wij kunnen b.v. eerst de intervallen nemen, waarvoor het definiëerende getal a_1 het kleinste is; onder deze degene, waarvoor het definiëerende getal a_2 het kleinste is enz., tot wij een bepaald interval hebben uitgekozen. Zij I_2 dus het uitgekozen interval.

Onder de intervallen van N_3, die deelen zijn van I_2, moet er weer minstens één zijn, dat oneindig vele punten van A bevat. Zijn er meerdere, dan kiezen we volgens denzelfden regel een bepaald interval uit en noemen dit I_3.

Gaan we zoo voort, dan verkrijgen wij een aftelbare verzameling

van gesloten intervallen I_k, waarvan ieder een deel van alle voorafgaande is. Volgens § 22 hebben al deze intervallen een bepaald punt P gemeen. Van dit punt P bewijzen we nu gemakkelijk, dat het een verdichtingspunt van de puntverzameling A is.

Zij nl. I een *willekeurig* interval, dat P tot inwendig punt heeft. Volgens § 23 kan men een index k vinden zoodanig, dat het interval I_k, van het net N_k, dat P bevat, geheel tot I behoort. Daar dit interval I_k oneindig vele punten van de verzameling A bevat, geldt hetzelfde voor het interval I, waarmede de stelling bewezen is.

Een puntverzameling, die uit oneindig vele punten bestaat, doch niet begrensd is, behoeft geen verdichtingspunt te bezitten. Dit blijkt uit de verzameling der geheele getallen.

VRAAGSTUKKEN.

36. Bepaal de verdichtingspunten van de ééndimensionale verzameling der punten (of getallen):

$$x = 2^{-m_1} + 2^{-m_2},$$

waarin m_1 en m_2 natuurlijk getallen zijn.

37. Bepaal evenzoo de verdichtingspunten van de verzameling:

$$x = 2^{-m_1} + 2^{-m_2} + \quad . \ . \ . \ . \quad + 2^{-m_k}$$

waarin $m_1, m_2, \ . \ . \ . \ . \ ., m_k$ willekeurige natuurlijke getallen zijn en k gegeven is.

38. Doe hetzelfde voor de verzameling:

$$x = 2^{-m_1} + 3^{-m_2}$$

39. Indien de bovenste grens van een naar boven begrensde getallenverzameling geen getal van de verzameling is, is zij een verdichtingspunt van de verzameling. Is de verzameling aftelbaar, dan is zij tevens de bovenste limiet.

40. Bepaal van beide twee dimensionale open puntverzamelingen, die in de vraagstukken 28 en 29 beschouwd zijn, de verdichtingspunten.

41. Een verdichtingspunt van de verzameling der verdichtingspunten van een gegeven puntverzameling is tevens zelf een verdichtingspunt van die gegeven puntverzameling.

42. Laten a' de verdichtingspunten zijn van een begrensde verzameling van getallen a, b' die van een begrensde verzameling van getallen b. Toon aan, dat de verdichtingspunten van de verzameling der getallen $a + b$ de volgende zijn:

1. De getallen $a' + b$
2. De getallen $a + b'$
3. De getallen $a' + b'$.

Dat de genoemde getallen werkelijk verdichtingspunten zijn van de verzameling der getallen $a + b$, is gemakkelijk aan te toonen. Om te bewijzen, dat er geen andere zijn, ga men als volgt te werk:

Zij P een verdichtingspunt van de verzameling der getallen $a + b$. Wij beschouwen een ééndimensionaal gesloten interval I, dat P tot middelpunt

en een lengte ε heeft. Dit interval bevat oneindig vele getallen $a+b$. Zij α de bovenste grens van de bijbehoorende getallen a, β die van de bijbehoorende getallen b, dan ziet men gemakkelijk, als ξ de coördinaat van P is:

$$\xi - \varepsilon \leqq \alpha + \beta \leqq \xi + \varepsilon.$$

Volgens vraagstuk 39 is het getal α ook een getal a of een getal a', het getal β ook een getal b of een getal b'. Laat men nu ε afnemen, dan kunnen de getallen α en β niet toenemen. Zij α' de onderste grens der getallen α, β' de onderste grens der getallen β. Volgens de vraagstukken 39 en 41 is het getal α' een getal a of een getal a', het getal β' een getal b of een getal b'. Verder ziet men gemakkelijk:

$$\alpha' + \beta' = \xi$$

waarmede het gestelde bewezen is.

43. In het vorige vraagstuk volgde de eindigheid der getallen α, β, α', β' uit de begrensdheid der beide gegeven verzamelingen. Men toone aan, dat deze blijft gelden, als van de twee gegeven verzamelingen alleen gegeven is, dat beide naar boven of beide naar beneden begrensd zijn. De in het vorige vraagstuk bewezen stelling blijft dan dus geldig.

§ 27. Een puntverzameling A heet **afgesloten,** indien er geen enkel punt bestaat, dat niet tot A behoort en verdichtingspunt van A is.

Stelling. *Een gesloten interval is een afgesloten puntverzameling.*

Zij het interval gedefiniëerd door de betrekkingen:

$$a_p \leqq x_p \leqq b_p \quad (p: 1, 2, \ldots n).$$

Zij P een punt, dat niet tot het interval behoort, en laten ξ_p de coördinaten van P zijn. Voor minstens één waarde m van p moet men hebben:

$$\xi_m < a_m \text{ of } b_m < \xi_m.$$

Zij in het eerste geval λ een positief getal en

$$\lambda < a_m - \xi_m.$$

Het interval, dat bepaald wordt door de betrekkingen:

$$\xi_p - \lambda < x_p < \xi_p + \lambda \quad (p = 1, 2 \ldots n)$$

heeft met het gegeven interval geen enkel punt gemeen, daar voor $p = m$ deze betrekkingen met de definiëerende van het gegeven interval in strijd zijn. Daar dit tweede interval het punt P tot inwendig punt heeft, is P geen verdichtingspunt van het gegeven interval.

In het tweede geval stelle men:

$$\lambda < \xi_m - b_m$$

en redeneere verder op de zelfde wijze. De stelling is hiermede bewezen.

Uit de definitie van „afgesloten puntverzameling" volgt verder onmiddellijk, dat de leege puntverzameling en de geheele ruimte

R_m beide afgeloten puntverzamelingen zijn. Volgens § 24 zijn deze beide puntverzamelingen tevens open. Men kan bewijzen, dat het de eenige puntverzamelingen zijn, die tegelijk open en afgesloten zijn.

VRAAGSTUKKEN.

44. Een verzameling, die slechts uit een eindig aantal punten bestaat, is afgesloten.

45. De verzameling der verdichtingspunten van een gegeven puntverzameling is afgesloten. Hetzelfde geldt voor de verzameling, die men krijgt door een gegeven puntverzameling af te sluiten, d. w. z. met de verzameling harer verdichtingspunten te vereenigen. Met behulp van deze stellingen geve de lezer voorbeelden van afgesloten puntverzamelingen.

46. Zij $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ een functie, die in de geheele ruimte gedefiniëerd en continu is. Zijn dan a en b twee willekeurige reëele getallen, dan is de verzameling der punten, waarvoor:

$$a \leqq f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqq b,$$

afgesloten.

47. Is omgekeerd een functie in de geheele ruimte gedefinëerd en eindig, en is voor ieder paar getallen a en b de in het vorige vraagstuk genoemde verzameling afgesloten, dan is de functie in de geheele ruimte continu.

§ **28.** Zij gegeven een puntverzameling A benevens een verzameling (U) van puntverzamelingen U. Indien nu ieder punt van A tot minstens één verzameling U van (U) behoort, zegt men, dat A door de verzameling (U) **overdekt** wordt.

Stelling van Heine en Borel. *Indien een begrensde afgesloten puntverzameling A overdekt wordt door een verzameling (U) van open puntverzamelingen U, dan bestaat er steeds een eindige deelverzameling van (U), waardoor A eveneens overdekt wordt.*

Zij I_1 een afgesloten interval, dat A bevat. Wij construeeren een aftelbare verzameling van netten N_k, waarvan ieder een onderverdeeling is van alle voorafgaande, en waarvan het eerste uit het enkele interval I_1 bestaat. Is $I_k^{(m)}$ een interval van het net N_k, dan zullen wij de verzameling der punten van A, die tot $I_k^{(m)}$ behooren, aanduiden door $A_k^{(m)}$. Voor elke waarde van k is er dan een eindig aantal puntverzamelingen $A_k^{(m)}$, welker vereeniging de oorspronkelijke verzameling A is.

Is de puntverzameling A leeg, dan is de stelling waar. Daar toch de leege puntverzameling een deel is van elke andere, wordt in dit geval A door een enkele puntverzameling U reeds overdekt.

Is A niet leeg, dan zullen wij onderstellen, dat de stelling niet waar was, en aantoonen, dat men dan tot een tegenstrijdigheid komt.

Geldt de stelling niet voor A, dan moet zij ook voor minstens één der puntverzamelingen $A_2^{(m)}$ niet gelden. Want kan men elk der eindig vele puntverzamelingen $A_2^{(m)}$ door een eindig aantal

puntverzamelingen U overdekken, dan geldt hetzelfde voor hun vereeniging A.

Onder de puntverzamelingen $A_2^{(m)}$, waarvoor de stelling niet geldt, kiezen we nu een bepaalde uit op analoge wijze als dit in § 26 gebeurd is. Gaat men dan op dezelfde wijze voort, dan verkrijgt men een bepaalde puntverzameling $A_3^{(m)}$, waarvoor de stelling niet geldt en die een deel is van de eerste uitgekozen puntverzameling $A_2^{(m)}$, enz. Zoo verkrijgt men een bepaalde aftelbare verzameling van puntverzamelingen $A_k^{(m)}$.

De intervallen $I_k^{(m)}$, waartoe deze puntverzamelingen $A_k^{(m)}$ behooren, hebben volgens § 22 een bepaald punt P gemeen. Daar voor geen dezer verzamelingen $A_k^{(m)}$ de stelling geldt, kan geen dezer verzamelingen leeg zijn. Men ziet ook onmiddellijk, dat geen van hen uit het enkele punt P bestaan kan. Hieruit leidt men gemakkelijk af, dat P *verdichtingspunt* is van elk dezer puntverzamelingen $A_k^{(m)}$, dus ook van A. Daar A afgesloten is, is P dus een punt van A.

Het punt P zal dan, evenals ieder punt van A, tot minstens één puntverzameling U behooren. Volgens § 23 kan men dan echter een index k vinden zoodanig, dat elk bijbehoorend interval $I_k^{(m)}$, dat P bevat geheel tot deze U behoort. De bijbehoorende puntverzameling $A_k^{(m)}$ wordt dan door de eene puntverzameling U geheel overdekt, waarmede de bovenaangekondigde tegenstrijdigheid verkregen is.

Is de puntverzameling A niet begrensd of niet afgesloten, dan is het niet altijd mogelijk uit een overdekkende verzameling (U) een eindige overdekkende deelverzameling te vinden. Hetzelfde geldt als de verzamelingen U niet alle open zijn. Dit blijkt uit de volgende voorbeelden:

1. A zij de verzameling der natuurlijke getallen k, (U) besta uit de intervallen:

$$k-1 < x < k+1 \quad (k=1, 2, \ldots).$$

2. A zij het interval:

$$0 < x < 1.$$

(U) besta uit de intervallen:

$$0 < x < 1 - \frac{1}{k} \quad (k=1, 2 \ldots).$$

3. A zij het interval:

$$0 \leqq x \leqq 1.$$

(U) besta uit de intervallen:

$$0 < x < 1 - \frac{1}{k} \quad (k=1, 2 \ldots)$$

tezamen met de verzameling, die uit het punt $x=1$ bestaat.

HOOFDSTUK II.

Bewerkingen met Puntverzamelingen.

§ 29. In § 7 hebben wij reeds de **vereeniging** en de **som** van eindig of oneindig vele verzamelingen gedefiniëerd. Wij zullen thans eenige stellingen bewijzen, die op deze bewerking betrekking hebben.

Stelling. *De vereeniging van eindig of oneindig vele open puntverzamelingen is weer een open puntverzameling.*

Zij P een punt, dat behoort tot de vereeniging V der open puntverzamelingen A, B, C, enz. Het behoort dan tot minstens een van deze verzamelingen, b.v. tot A. Daar A open is, is P een inwendig punt van A en bestaat er dus een open interval dat P bevat en een deel van A is. Dit interval is dan ook een deel van V, waaruit de stelling volgt.

Stelling. *De vereeniging van twee afgesloten puntverzamelingen is weer een afgesloten puntverzameling.*

Zij P een punt, dat niet tot de vereeniging V van de beide afgesloten puntverzamelingen A en B behoort. Wij moeten dan bewijzen, dat P geen verdichtingspunt van V is.

Daar P niet tot V behoort, behoort het niet tot A en is dus geen verdichtingspunt van A. Er bestaat dus een open interval, dat P bevat en geen enkel punt van A bevat. Zij dit interval gedefiniëerd door de betrekkingen:

$$a_p < x_p < b_p \ (p = 1, 2 \ldots n).$$

Evenzoo bestaat er een open interval, dat P bevat en geen enkel punt van B bevat. Zij dit interval gedefiniëerd door de betrekkingen:

$$a'_p < x_p < b'_p \ (p = 1, 2, \ldots n).$$

Zij c_p het grootste der beide getallen a_p en a'_p, d_p het kleinste der beide getallen b_p en b'_p. Het interval, dat gedefiniëerd wordt door de betrekkingen:

$$c_p < x_p < d_p \ (p = 1, 2, \ldots n)$$

bevat P. Daar dit interval een deel is van elk der beide voor-

afgaande intervallen, bevat het noch een punt van A noch een van B, dus ook niet van V, waarmede de stelling bewezen is.

Door volledige inductie vindt men, dat de vereeniging van *eindig* vele afgesloten puntverzamelingen weer een afgesloten puntverzameling is.

§ 30. De vereeniging van *oneindig* vele afgesloten puntverzamelingen behoeft niet afgesloten te zijn, ook niet als het aantal dier puntverzamelingen aftelbaar is. Beschouwen wij b.v. in R_1 de gesloten intervallen:

$$\frac{1}{m+1} \leqq x \leqq \frac{1}{m} \quad (m = 1,\ 2,\ 3 \text{ enz.}).$$

De vereeniging van deze verzameling is de verzameling:

$$0 < x \leqq 1.$$

Deze verzameling is niet afgesloten, daar het punt 0 verdichtingspunt van de verzameling is zonder ertoe te behooren.

Wij zullen zelfs de volgende stelling bewijzen:

Stelling. *Elke niet leege open puntverzameling kan men verkrijgen als de vereeniging van aftelbaar vele gesloten intervallen.*

Wij construeeren hiertoe een aftelbare verzameling van netten N_k, waarvan ieder een onderverdeeling is van alle voorafgaande, en die de geheele ruimte R_n overdekken, dus zooals wij die in § 20 beschouwd hebben. Daar elk van deze netten uit aftelbaar vele intervallen bestaat, vormen alle intervallen, die tot deze netten behooren, een aftelbare verzameling.

Zij U een open puntverzameling. Wij beschouwen nu de verzameling (I) van de intervallen I, die tot een der netten N_k behooren en een deel zijn U. Daar (I) een deel is van de zooeven beschouwde intervalverzameling, bestaat (I) uit aftelbaar vele intervallen I.

Daar elk der intervallen I van (I) een deel is van U, geldt hetzelfde voor de vereeniging der intervallen I. Kunnen wij omgekeerd aantoonen, dat ieder punt van U tot deze vereeniging behoort, dan is de stelling bewezen.

Zij dus P een punt van U. Volgens § 23 kan men dan een index k vinden, zoodanig, dat elk interval van het net N_k, dat P bevat, geheel tot U behoort, dus een interval van (I) is. Daar *ieder* punt der ruimte tot minstens één interval van elk der netten behoort, bestaat er steeds een interval van N_k, dat P bevat, en behoort P dus tot een interval van (I), wat te bewijzen was.

De aldus geconstrueerde intervalverzameling (I) kan worden vereenvoudigd. Zij namelijk A een interval van (I), en N_m het net, waartoe A behoort. Er zijn dan twee mogelijkheden.

1. Er bestaat een index $k < m$, zoodanig, dat het net N_k een interval bevat, dat tot (I) behoort en waarvan A een deel is.

2. Er bestaat geen zoodanige index k.

In het eerste geval kunnen wij A weglaten, zonder dat de verzameling der overblijvende intervallen van (I) ophoudt, U te overdekken. Laten wij uit (I) alle intervallen weg, waarvoor dit geval zich voordoet, dan konden wij over een verzameling (J) van intervallen J, welke nog steeds U overdekt.

Deze verzameling (J) bezit blijkbaar de eigenschap, dat geen interval van (J) een deel is van een ander interval van (J). Twee intervallen van (J) kunnen dus geen inwendig punt gemeen hebben; hebben zij dus punten gemeen, dan behooren deze tot de begrenzing van beide intervallen.

§ 31. Natuurlijk *kan* de vereeniging van oneindig vele afgesloten puntverzamelingen wel weer afgesloten zijn. In het bijzonder zullen wij de volgende stelling bewijzen:

Stelling. *De vereeniging van oneindig vele afgesloten puntverzamelingen is weer afgesloten, indien een willekeurig interval steeds van slechts eindig vele dier verzamelingen minstens één punt bevat.*

Zij P een verdichtingspunt van V, I een interval dat P tot inwendig punt heeft. De punten van de gegeven vereeniging V, die tot I behooren, behooren tot eindig vele der gegeven afgesloten puntverzamelingen; zij V_1 de vereeniging van deze puntverzamelingen. De vereeniging V_2 der overige gegeven puntverzamelingen heeft met I geen enkel punt gemeen en heeft dus P niet tot verdichtingspunt. Het punt P moet dan verdichtingspunt van V_1 zijn. Was nl. het laatste niet het geval, dan zou men een interval I' kunnen vinden, dat P tot inwendig punt had en geen enkel punt gemeen had met V_1. De gemeenschappelijke punten der beide intervallen I en I' zouden een open interval vormen dat P tot inwendig punt had en geen enkel punt gemeen had met V_1 en V_2, dus ook niet met V. Het punt P zou dus geen verdichtingspunt van V kunnen zijn.

De puntverzameling V_1 is nu als vereeniging van eindig vele afgesloten puntverzamelingen weer afgesloten. Is P dus verdichtingspunt van V_1, dan moet P tot V_1 dus ook tot V behooren. Het gestelde is hiermede bewezen.

§ 32. Laat in een n-dimensionale ruimte R_n een puntverzameling V gegeven zijn. De verzameling V' van alle punten van R_n, die niet tot V behooren heet de **complementairverzameling** van V, zoodat omgekeerd V de complementairverzameling van V' is.

Stelling. *De complementairverzameling van een afgesloten puntverzameling is een open puntverzameling en omgekeerd.*

Zij de verzameling V afgesloten. Een punt P, dat tot V' behoort, is dan geen verdichtingspunt van V. Er bestaat dan dus een open interval dat P bevat, en waarvan alle punten tot V' behooren, dus is V' een open puntverzameling. Gemakkelijk bewijst men ook het omgekeerde.

De verzameling R_n en de leege puntverzameling zijn complementair. Daar deze zoowel open als afgesloten zijn, geldt de stelling ook daarvoor.

§ **33**. Laten in R_n eindig of oneindig vele puntverzamelingen A, B, C, enz. gegeven zijn. De verzameling S van de punten, die tot *alle* gegeven verzamelingen behooren, heet de **doorsnede** dier verzamelingen.

Men schrijft:

$$S = ABC \ldots\ldots$$

De doorsnede wordt dus geschreven als een *product* van de gegeven verzamelingen. Dit vindt zijn reden hierin, dat de bewerking der doorsnijding *distributief* is ten opzichte van de vereeniging, zoodat men b.v. heeft:

$$A\,(B \dot{+} C) = AB \dot{+} AC.$$

Beide leden toch stellen de verzameling voor der punten, die eenerzijds tot A, anderzijds tot B of tot C behooren.

Stelling. *De doorsnede van eenige puntverzamelingen A, B, C, enz. is de complementairverzameling van de vereeniging der complementairverzamelingen A', B', C', enz.* Omgekeerd is de vereeniging de complementairverzameling van de doorsnede der complementairverzamelingen.

Zij n.l. P een punt, dat niet tot de genoemde doorsnede behoort. Het behoort dan tot minstens één der gegeven verzamelingen niet, b.v. *niet* tot A. Dan behoort het tot de complementairverzameling A' van A dus tot de vereeniging der complementairverzamelingen. Evenzoo bewijst men het omgekeerde.

Stelling. *De doorsnede van eindig of oneindig vele afgesloten puntverzamelingen is weer een afgesloten puntverzameling.*

Deze doorsnede is n. l. de complementairverzameling van de vereeniging der complementairverzamelingen. Daar deze laatste open zijn, is hun vereeniging ook open, waaruit de stelling volgt.

Stelling. *De doorsnede van een eindig aantal open puntverzamelingen is weer een open puntverzameling.*

De complementairverzamelingen der gegevene zijn hier n. l.

afgesloten, hun vereeniging is dus ook afgesloten, waaruit de stelling volgt.

Van de doorsnede van oneindig vele open puntverzamelingen kan men in het algemeen evenmin iets zeggen als van de vereeniging van oneindig vele afgeslotene.

VRAAGSTUKKEN.

1. Toon aan, dat de vereeniging distributief is ten opzichte van de doorsnijding, dat men m. a. w. heeft: $A \dotplus B\,C = (A \dotplus B)\,(A \dotplus C)$.

2. Een niet-begrensde, open puntverzameling is de vereeniging van aftelbaar vele begrensde, open puntverzamelingen.

Hiertoe beschouwe men de doorsneden van de gegeven puntverzameling met de open intervallen:

$$-k < x_p < +k \quad (p = 1, 2, \ldots . n),$$

waarin k een natuurlijk getal is.

3. Een niet-begrensde afgesloten puntverzameling is de vereeniging van aftelbaar vele begrensde afgesloten puntverzamelingen.

4. De doorsnede van aftelbaar vele open puntverzamelingen is weer open, indien een willekeurig interval tot slechts een eindig aantal dezer puntverzamelingen niet geheel behoort.

§ 34. In § 22 hebben wij bewezen, dat wanneer een aftelbare verzameling van gesloten intervallen gegeven is, waarvan ieder een deel is van alle voorafgaande, er minstens één punt is, dat tot al deze intervallen behoort. Wij kunnen dit ook zóó uitdrukken: de doorsnede van deze intervallen is niet leeg. Deze stelling zullen wij thans uitbreiden.

Stelling. *Is een aftelbare verzameling van begrensde afgesloten, niet leege puntverzamelingen gegeven, waarvan ieder een deel is van alle voorafgaande, dan is de doorsnede van deze puntverzamelingen niet leeg.*

Laten A_1, $A_2, \ldots .$ de gegeven puntverzamelingen zijn. Was de doorsnede dezer verzamelingen leeg, dan zou een willekeurig punt P van A_1 niet tot alle puntverzamelingen A_k behooren. Bij ieder punt P van A_1 zou men dus een index m kunnen vinden zóódanig, dat P niet tot A_m behoorde, en dus ook niet tot A_k voor $k \geqq m$. Daar A_m afgesloten is, zou P dan ook geen verdichtingspunt van A_m zijn, en zou er dus een open interval $I\,(P)$ bestaan, dat P bevatte en geen enkel punt gemeen had met A_m, en dus ook niet met A_k voor $k \geqq m$.

Daar men aldus bij ieder punt P van A_1 een interval $I\,(P)$ zou kunnen vinden, zouden deze intervallen $I\,(P)$ de puntverzameling A_1 overdekken. Daar A_1 begrensd en afgesloten is, zou men, volgens de stelling van Heine en Borel een *eindig* aantal

intervallen I (P) kunnen vinden, waardoor A_1 eveneens overdekt werd. Onder de indices m, welke toegevoegd zijn aan de bij deze intervallen behoorende punten P is er één de grootste; zij m' deze index. Voor $k > m'$ zal dan de puntverzameling A_k met geen der intervallen I (P) een punt gemeen kunnen hebben, dus ook niet met A_1. Dit is echter in strijd met het onderstelde, dat elke puntverzameling A_k een deel van A_1 en niet leeg is.

Zijn de gegeven puntverzamelingen niet begrensd, dan kan hun doorsnede leeg zijn; om dit in te zien, beschouwe men in R_1 de verzamelingen $x \geqq k$, waarin k een natuurlijk getal is.

§ **35.** Zij A een gegeven puntverzameling en B een deel van A. Onder $A—B$ verstaat men de verzameling van alle punten van A, die niet tot B behooren. Deze puntenverzameling heet het **verschil** der puntverzamelingen A en B, en de bewerking, die bestaat in het bepalen van het verschil van twee gegeven puntverzamelingen, heet de **aftrekking** van die puntverzamelingen.

Daar de punten van $A—B$ niet tot B behooren, behooren zij tot de complementairverzameling van B. Hieruit volgt, dat het verschil der puntverzamelingen A en B niets anders is dan de doorsnede van A met de complementairverzameling van B.

VRAAGSTUKKEN.

5. Zij B een deelverzameling van A. Onderzoek, of steeds

$$(A - B) \dot{+} C = (A \dot{+} C) - B.$$

Men ziet gemakkelijk, dat dit niet altijd zoo is. Wanneer is het wel zoo?

6. De puntverzameling $A - B$ is de doorsnede van alle puntverzamelingen C, die voldoen aan de betrekking $B \dot{+} C = A$.

7. Het verschil van een open en een afgesloten puntverzameling is weer open, dat van een afgesloten en een open puntverzameling is weer afgesloten.

8. Een begrensde, open puntverzameling is steeds het verschil van twee begrensde, afgesloten puntvrezamelingen.
Om dit te bewijzen neme men voor de eerste dezer puntverzamelingen een gesloten interval, dat de gegeven open puntverzameling bevat.

9. Een begrensde, afgesloten puntverzameling is steeds het verschil van twee begrensde, open puntverzamelingen.

§ **36.** Zij volgens een zekere wet aan ieder natuurlijk getal k een puntverzameling A_k toegevoegd. Deze puntverzamelingen A_k vormen dan een **rij** van puntverzamelingen. Onder een **element** van de rij verstaan wij een puntverzameling A_k, waarbij men niet alleen let op deze puntverzameling, maar ook op den index k. Twee elementen van de rij zijn dus verschillend, wanneer de

bijbehoorende indices k verschillend zijn; de puntverzamelingen A_k zelf kunnen dan zeer wel identiek wezen.

Zij bijv. voor k oneven de puntverzameling A_k het één-dimensionale interval $0 < x < 1$; voor k even het interval $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$. In dit geval zijn de puntverzamelingen A_k met oneven index identiek; als elementen van de rij beschouwd, zijn ze echter verschillend,

Zij B_m de *vereeniging* van alle puntverzamelingen A_k, welker index $k \geqq m$ is. De puntverzameling Λ, welke de doorsnede is van alle puntverzamelingen B_m, heet de **bovenste limiet** van de gegeven rij.

Zij C_m de *doorsnede* van alle puntverzamelingen A_k, welker index $k \geqq m$ is. De puntverzameling L, welke de vereeniging is van alle puntverzamelingen C_m, heet **onderste limiet** van de gegeven rij. Zoowel de bovenste als de onderste limiet kan leeg zijn.

Zijn de bovenste en de onderste limiet van een rij puntverzamelingen identiek, dan heeten zij elk de **limiet** van de gegeven rij. De gegeven rij heet dan **convergent.** De rij is dus o. a. convergent, als onderste en bovenste limiet leeg zijn.

VRAAGSTUKKEN.

10. De onderste limiet L van een rij puntverzamelingen is een deel van de bovenste limiet Λ.

Het begrip hiervan is analoog aan het bewijs, dat in § 14 gegeven is voor de stelling, dat de onderste limiet van een getallenrij niet grooter is dan de bovenste limiet. Men vervange slechts „bovenste grens" door „vereeniging" „onderste grens" door „doorsnede," „niet grooter dan" door „een deel van".

11. De bovenste limiet van een rij puntverzamelingen is de verzameling van alle punten, die tot oneindig vele elementen van de rij behooren.

Men ziet n. l. gemakkelijk, dat zulk een punt tot alle B_m behoort, dus ook tot hun doorsnede. Behoort omgekeerd een punt niet tot oneindig vele A_k, dan behoort het niet tot alle B_m, dus niet tot hun doorsnede.

12. De onderste limiet van een rij puntverzamelingen is de verzameling van alle punten, die tot alle elementen van de rij behooren, met uitzondering van hoogstens een eindig aantal.

13. De onderste limiet van een rij puntverzamelingen is de complementairverzameling van de bovenste limiet van de rij der complementairverzamelingen van de elementen der gegeven rij.

14. Zij gegeven een rij van één-dimensionale intervallen $a_k < x < b_k$. Zij α de onderste en α' de bovenste limiet van de rij der getallen a_k; β en β' de overeenkomstige grootheden voor de rij der getallen b_k. Toon aan, dat ieder getal, dat aan $\alpha' < x < \beta$ voldoet, tot de onderste limiet van de gegeven intervallenrij behoort, terwijl ieder, tot de onderste limiet behoorend, getal aan $\alpha' \leqq x \leqq \beta$ voldoet. Wat zijn de overeenkomstige stellingen voor de bovenste limiet der intervallenrij?

15. Voor de *convergentie* van de, in het vorige hoofdstuk genoemde, intervallenrij is noodzakelijk en voldoende. dat aan de beide volgende voorwaarden voldaan is:

1. elk der rijen a_k en b_k is convergent;
2. er bestaat een index l zoodanig, dat voor $k \geqq l$ de getallen a_k voortdurend $\leqq$ hun limiet, òf voortdurend $>$ hun limiet zijn, en evenzoo bestaat er een index m zóódanig, dat voor $k \geqq m$ de getallen b_k steeds $\geqq$ hun limiet òf steeds $<$ hun limiet zijn.

16. Is elke puntverzameling van een gegeven rij een deel van alle volgende, dan is de rij convergent en haar limiet is de vereeniging van alle puntverzamelingen der rij.

17. Is elke puntverzameling van een gegeven rij een deel van alle voorafgaande, dan is de rij convergent en haar limiet is de doorsnede van alle puntverzamelingen der rij.

§ 37. Met behulp van de uitkomsten, die in het eerste hoofdstuk en in de voorafgaande paragrafen van dit hoofdstuk verkregen zijn, zullen wij nu eenige bijzondere puntverzamelingen gaan bestudeeren.

Zij in een één-dimensionale ruimte een rij van netten N_k gegeven, waarvan ieder een onderverdeeling is van alle voorafgaande. Zij verder gegeven een rij van natuurlijke getallen α_k. Volgens een zekere wet kiezen wij nu uit elk der netten N_k een een aantal intervallen $I_k^{(m)}$, dat gelijk is aan α_k. Zij U_k de puntverzameling, welke gevormd wordt door de inwendige punten van de intervallen, die uitgekozen zijn uit de netten welker index $\leqq k$ is. Zij U de verzameling van de inwendige punten van alle uitgekozen intervallen.

Wij zullen onderstellen, dat het uitkiezen zóódanig heeft plaats gehad, dat geen enkel uitgekozen interval een deel is van een ander uitgekozen interval. In dit geval kan een eindpunt van een uitgekozen interval geen inwendig punt van een ander uitgekozen interval zijn.

De zooeven genoemde puntverzameling U is open, daar zij de vereeniging van oneindig vele open puntverzamelingen is. Haar complementairverzameling is afgesloten en niet leeg, daar deze in ieder geval de eindpunten van de uitgekozen intervallen bevat. Zijn alle netten N_k onderverdeelingen van eenzelfde gesloten interval I, dan is ook de puntverzameling $I—U$ afgesloten en niet leeg.

Door A zullen wij de complementairverzameling van U aanduiden, wanneer de netten N_k de geheele ruimte R_1 overdekken; zijn de netten N_k onderverdeelingen van een gesloten interval I, dan stellen wij $A = I—U$. Wij zullen nagaan, welke eigenschappen de puntverzameling A verkrijgt, indien zich bij het uitkiezen der intervallen $I_k^{(m)}$ bepaalde bijzonderheden voordoen.

1⁰. Laten $J_k^{(n)}$ de intervallen zijn van het net N_k, die niet uitgekozen zijn en ook geen deel zijn van een interval, dat uit één der aan N_k voorafgaande netten is uitgekozen. Wij zullen nu onderstellen, dat voor elke waarde van k elk interval $J_k^{(n)}$ minstens één interval bevat, dat uitgekozen wordt uit een der op N_k volgende netten.

Zij S een willekeurig één-dimensionaal interval, of zoo alle netten N_k onderverdeelingen van een gesloten interval I zijn, een willekeurig deelinterval van I. Wij zullen aantoonen, dat S steeds punten van U bevat en wel minstens een interval van zoodanige punten.

Zij P een inwendig punt van S. Volgens § 23 bestaat er een index k, zoodanig dat ieder interval van het net N_k, dat P bevat, geheel tot S behoort. Zulk een interval zal nu òf een uitgekozen interval zijn, of een deel van een uitgekozen interval òf een uitgekozen interval bevatten. Daar alle inwendige punten van een uitgekozen interval tot U behooren, bestaat er dus een open interval van punten van U, dat tot S behoort.

Een puntverzameling heet **overal dicht** indien elk interval minstens één punt van de verzameling bevat. Geldt dit alleen voor de intervallen, die deelen zijn van een interval I, dan heet de puntverzameling overal dicht op I. Uit het voorafgaande volgt nu, dat de puntverzameling U hetzij overal dicht is, hetzij overal dicht op I.

Een puntverzameling heet **nergens dicht,** indien een willekeurig interval steeds minstens één deelinterval bezit, dat geen enkel punt van de verzameling bevat. Uit het voorafgaande volgt nu, dat de puntverzameling A nergens dicht is.

2⁰. Een tweede bijzonderheid die zich bij het uitkiezen der intervallen $I_k^{(m)}$ kan voordoen, is de volgende:

Wij hebben reeds ondersteld, dat geen enkel interval $I_k^{(m)}$ een deel was van eenig ander interval. Wij zullen nu ook onderstellen, dat geen twee der intervallen $I_k^{(m)}$ een eindpunt gemeen hebben en dat de eindpunten van het eventueele interval I geen eindpunten van een interval $I_k^{(m)}$ zijn. Wij zullen aantoonen, dat in dit geval ieder punt van de puntverzameling A een *verdichtingspunt* van A is.

Zij P een punt van A. Er zijn dan twee mogelijkheden: het punt P behoort tot geen enkel interval $I_k^{(m)}$, of wel het punt P is eindpunt van een interval $I_k^{(m)}$.

In het eerste geval behoort P voor elke waarde van k tot een interval $J_k^{(n)}$. Is S een willekeurig interval, dat P tot inwendig punt heeft, dan kan men k zoo bepalen, dat dit interval $J_k^{(n)}$ geheel tot S behoort. Beide eindpunten van $J_k^{(n)}$ zijn punten van A, zoodat

S minstens een punt van A bevat, dat niet met P samenvalt. Het punt P is dan dus verdichtingspunt van A.

Is P eindpunt van $I_k^{(m)}$, dan zal volgens de onderstelling voor elke waarde van k het andere interval van het net N_k, dat P tot eindpunt heeft, een interval $J_k^{(n)}$ zijn. (De eenige punten, die slechts eindpunten zijn van één interval van N_k, zijn eventueel de eindpunten van I, en deze zijn volgens de onderstelling geen eindpunten van een interval $I_k^{(m)}$). Het punt P behoort dus ook nu voor elke waarde van k tot een interval $J_k^{(n)}$, zoodat dezelfde redeneering als zooeven dus leert, dat P verdichtingspunt van A is.

Een puntverzameling, waarvan ieder punt tevens verdichtingspunt is, heet **in zich dicht.** Is de puntverzameling bovendien afgesloten, dan heet zij **perfect.** Uit het bovenstaande volgt dus, dat de puntverzameling A thans perfect is.

Het is gemakkelijk een voorbeeld te geven, waarbij de behandelde bijzonderheden zich beide voordoen, zoodat de puntverzameling A zoowel nergens dicht als perfect is. Hiertoe beschouwen wij een rij van netten N_k, die onderverdeelingen zijn van het interval $0 \leqq x \leqq 1$. De definiëerende getallen van het net N_k zijn de getallen, die men kan schrijven als breuken, waarvan de noemer 3^k is. Gaat men dan van een net N_k over op het net N_{k+1}, dan wordt blijkbaar elk interval van het net N_k in drie intervallen verdeeld.

Wij kiezen nu van het net N_1 het middelste der drie intervallen uit; van het net N_2 kiezen wij elk interval uit, dat het middelste deelinterval is van een niet uitgekozen interval van N_1, en gaan volgens dezen regel voort. In het algemeen is dus het middelste der drie deelintervallen van een interval $J_k^{(n)}$ een interval $I_{k+1}^{(m)}$; de beide andere zijn intervallen $J_{k+1}^{(n)}$. Het is duidelijk, dat hier werkelijk de beide besprokene bijzonderheden zich voordoen.

Men ziet gemakkelijk, dat, wanneer men de getallen van het uitgekozen interval van het net N_1, voorstelt door oneindig voortloopende driedeelige breuken, het eerste cijfer achter de komma een 1 is; bij de uitgekozen intervallen van N_2 is het tweede cijfer een 1, enz. Bij de inwendige punten van een interval $J_k^{(n)}$ is elk der k eerste cijfers achter de komma een 0 of een 2; de eindpunten der intervallen $J_k^{(n)}$ kan men voorstellen door oneindig voortloopende repeteerende driedeelige breuken, welke het cijfer 1 niet bevatten, b.v. $0{,}0\dot{2}$; $0{,}2\dot{0}$, enz. *Men komt zoo tot de uitkomst dat de nergens dichte perfecte puntverzameling A bestaat uit alle getallen van het interval $0 \leqq x \leqq 1$, welke men kan schrijven als*

oneindig voortloopende driedeelige breuken, die het cijfer 1 niet bevatten.

VRAAGSTUKKEN.

18. De verzameling van alle getallen van het interval $0 \leqq x \leqq 1$, die men kan voorstellen door oneindig voortloopende g-deelige breuken, welke een bepaald cijfer, dat > 0 en $< g-1$ is, niet bevatten, is nergens dicht en perfect.

19. Onderzoek, of men ook een nergens dichte, perfecte puntverzameling krijgt, als het ontbrekende cijfer 0 of $g-1$ is.

20. Indien een bepaald cijfer slechts éénmaal en op één bepaalde plaats mag voorkomen, gelden dezelfde uitkomsten.

21. De punten van het interval $0 \leqq x \leqq 1$, die men kan voorstellen door de uitdrukking $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k!}$, waarin $a_k = 0$ of $=$ een natuurlijk getal $< k$ is, doch één bepaalde waarde niet mag aannemen, vormen een nergens dichte, perfecte puntverzameling.

22. De verzameling van alle punten van R_n, waarvan alle coördinaten meetbaar zijn, is overal dicht; hetzelfde geldt voor haar complementair-verzameling.

23. Laat men uit de, in de tekst beschreven, nergens dichte, perfecte puntverzameling de eindpunten der intervallen $J_k^{(n)}$ weg, dan houdt men een puntverzameling over, die in zich dicht, doch niet afgesloten is.

24. De begrenzing van een 2- of meerdimensionaal interval is een nergens dichte, perfecte puntverzameling.

§ 38. In § 30 is reeds gebleken, dat de vereeniging van oneindig vele, afgesloten puntverzamelingen niet afgesloten behoeft te zijn. Inderdaad kan men *elke* puntverzameling verkrijgen door vereeniging van haar punten en elk van deze punten vormt een afgesloten puntverzameling.

Daarentegen kan niet iedere puntverzameling door vereeniging van *aftelbaar vele* afgesloten puntverzamelingen verkregen worden. Wij zullen dit later *bewijzen*; in deze § zullen wij alleen enkele definities en eigenschappen bespreken.

Een puntverzameling, welke de vereeniging is van eindig of aftelbaar vele, afgesloten puntverzamelingen, heet een **uitwendige grensverzameling.**

Neemt men het aantal der vereenigde puntverzamelingen $= 1$, dan vindt men, dat elke afgesloten puntverzameling een uitwendige grensverzameling is.

Een puntverzameling, welke de doorsnede is van eindig of aftelbaar vele open puntverzamelingen, heet een **inwendige grensverzameling.**

Uit deze definitie volgt, evenals zooeven, dat elke open puntverzameling een inwendige grensverzameling is.

Stelling. *De complementairverzameling van een uitwendige grensverzameling is een inwendige grensverzameling en omgekeerd.*

Immers, de complementairverzameling van de vereeniging van eindig of aftelbaar vele afgesloten puntverzamelingen is de doorsnede der complementairverzamelingen, welke open zijn. Evenzoo bewijst men het omgekeerde.

Stelling. *De vereeniging van eindig of aftelbaar vele uitwendige grensverzamelingen is weer een uitwendige grensverzameling.*

Elk der gegeven verzamelingen is de vereeniging van eindig of aftelbaar vele afgesloten puntverzamelingen. Volgens § 7 vormen *al* deze afgesloten puntverzamelingen een verzameling, die eindig of aftelbaar is. Daar nu de gegeven vereeniging ook ontstaat door vereeniging van al deze afgesloten puntverzamelingen, is zij een uitwendige grensverzameling.

Stelling. *De doorsnede van eindig of aftelbaar vele inwendige grensverzamelingen is weer een inwendige grensverzameling.*

Men kan deze stelling op analoge wijze aantoonen als de voorafgaande. Men kan haar ook vinden door beschouwing van de complementairverzamelingen der verzamelingen, waarvan in de voorafgaande stelling sprake was.

Stelling. *Een open puntverzameling is een uitwendige grensverzameling.*

Dit volgt onmiddellijk uit de stelling, die in § 30 bewezen is.

Stelling. *Een afgesloten puntverzameling is een inwendige grensverzameling.*

Dit vindt men door de vorige stellig toe te passen op de complementairverzameling der gegevene.

Uit deze stellingen volgt, dat de vereeniging van een open en een afgesloten puntverzameling een uitwendige grensverzameling, hun doorsnede een inwendige grensverzameling is.

VRAAGSTUKKEN.

25. Een aftelbare puntverzameling is een uitwendige grensverzameling. Dit blijkt onmiddellijk, als men bedenkt, dat iedere punt van de verzameling een afgesloten puntverzameling is.

26. De verzameling van alle getallen van het interval $0 \leqq x \leqq 1$, die men kan voorstellen door oneindig voortloopende, g-deelige breuken, waarvan slechts één cijfer $= l$ is, (l gegeven), is een uitwendige grensverzameling.

27. De verzameling van alle getallen van het interval $0 \leqq x \leqq 1$, welke men kan voorstellen door oneindig voortloopende, g-deelige breuken, die een bepaald cijfer l slechts eindig vele malen bevatten, is een uitwendige grensverzameling.

28. De verzameling van alle getallen van het interval $0 \leqq x \leqq 1$, welke men kan voorstellen door oneindig voortloopende, g-deelige breuken, die

een bepaald cijfer l oneindig vele malen bevatten, is een inwendige grensverzameling.

29. De doorsnede van eindig vele, uitwendige grensverzamelingen is weer een uitwendige grensverzameling.

Men schrijve elk der gegeven puntverzamelingen als vereeniging van aftelbare vele afgesloten puntverzamelingen en passe de distrubitieve eigenschap der doorsnijding toe.

30. De vereeniging van eindig vele inwendige grensverzamelingen is weer een inwendige grensverzameling.

§ 39. De uit- en inwendige grensverzamelingen, die in de vorige § besproken zijn, werden verkregen door een eindig of aftelbaar aantal puntverzamelingen, die open of afgesloten waren met elkander te vereenigen of te snijden. Door ditzelfde nu met uit- en inwendige grensverzamelingen te doen, kan men trachten nog ingewikkelder puntverzamelingen te krijgen; op deze zou men dan hetzelfde proces kunnen toepassen, en zoo voortgaan.

Het gevolgde procédé bestaat dus hierin, dat men een eindig of aftelbaar aantal reeds geconstrueerde puntverzamelingen met elkander vereenigt of snijdt en zoo nieuwe puntverzamelingen tracht te verkrijgen. De puntverzamelingen, waarvan men dan oorspronkelijk uitgaat, zijn de opene en de afgeslotene. Men kan bewijzen, dat men zoo werkelijk, stap voor stap voortgaande, telkens nieuwe klassen van puntverzamelingen verkrijgt. Aan den anderen kant zal in het volgende hoofdstuk blijken, dat *niet elke* puntverzameling langs dezen weg te construeeren is.

De klassen van puntverzamelingen, die men langs dezen weg verkrijgt, en waarvan de eerste gevormd wordt door de open en afgesloten puntverzamelingen, de tweede door de uit- en inwendige grensverzamelingen, voor zoover ze niet open of afgesloten zijn, heeten **puntverzamelingen van Borel.**

Voor nadere studie van de classificatie en de eigenschappen dezer puntverzamelingen verwijzen wij naar het werk van HAHN, *Theorie der reellen Funktionen.*

HOOFDSTUK III.

De maat van Puntverzamelingen.

§ **40.** In de lagere meetkunde en, daarop voortbouwend, in de elementaire analyse wordt van verschillende figuren in ruimten van twee en drie afmetingen de inhoud berekend. Hierbij beperkt men zich tot betrekkelijk eenvoudige figuren; het is echter moeilijk, een scherpe grens te trekken tot waar men gaan kan.

Wij zullen in dit hoofdstuk aan *elke* puntverzameling eener n-dimensionale ruimte een bepaalde inhoud, of, zooals wij later zullen zeggen, een bepaalde *maat* toekennen. Dit is op verschillende wijzen mogelijk; het maatbegrip, dat in dit hoofdstuk ontwikkeld zal worden, is afkomstig van EMILE BOREL. Het belang van de definitie van BOREL is hierin gelegen, dat de maat, waartoe men geraakt, voor een uitgebreide klasse van puntverzamelingen de eigenschap bezit, die men intuïtief geneigd is aan den inhoud van een figuur toe te schrijven, nl. *dat de maat van een som gelijk is aan de som van de maten der deelen.*

Wij zullen ons in de volgende §§ eerst bezig houden met n-dimensionale intervallen en dan tot willekeurige puntverzamelingen overgaan.

§ **41.** *Onder den* **inhoud** *van een n-dimensionaal interval verstaan wij het product der n lengten van dit interval, hetzij het interval open of gesloten is.*

Uit deze definitie volgen onmiddellijk eenige stellingen.

Stelling. *Is een interval een deel van een ander interval, dan is de inhoud van het eerste interval niet grooter dan die van het tweede.*

Voor het bewijs van deze stelling is het voldoende, het geval te beschouwen, dat het eerste interval open, het tweede gesloten is. Is n.l. het eerste interval gesloten, dan zal het open interval, dat men door weglating van de begrenzing daaruit verkrijgt, denzelfden inhoud hebben en zeker ook een deel van het tweede zijn. En is het tweede interval open, dan zal het gesloten interval, dat men door toevoeging van de begrenzing eruit verkrijgt, denzelfden

inhoud hebben en zeker het eerste ook bevatten. Zij dus het eerste interval gedefiniëerd door de betrekkingen:

$$a_p < x_p < b_p \ (p = 1, 2 \ldots . n)$$

het tweede door de betrekkingen:

$$a'_p \leqq x_p \leqq b'_p \ (p = 1, 2 \ldots . n).$$

Is het eerste interval een deel van het tweede, dan moet men hebben

$$a'_p \leqq a_p < b_p \leqq b'_p \ (p = 1, 2 \ldots . n).$$

Hieruit volgt:

$$b_p - a_p \leqq b'_p - a'_p \ (p = 1, 2 \ldots . n).$$

Elke lengte van het eerste interval is dus niet grooter dan de overeenkomstige lengte van het tweede. Hetzelfde geldt dus voor het product der n lengten, waarmede de stelling bewezen is.

§ 42. **Stelling.** *Is I een gesloten interval, dan kan men steeds een open interval vinden, dat I bevat en waarvan de inhoud minder dan een gegeven positief getal ε van die van I verschilt.*

Zij I gedefiniëerd door de betrekkingen:

$$a_p \leqq x_p \leqq b_p \ (p = 1, 2 \ldots . n).$$

Wij beschouwen het open interval I_1, dat gedefiniëerd wordt door de betrekkingen:

$$a_p - \delta < x < b_p + \delta \ (p = 1, 2 \ldots . n)$$

Is l_p de p^{de} lengte van I, dan is de p^{de} lengte van I_1 blijkbaar $l_p + 2\delta$. De inhoud van I_1 is dus $(l_1 + 2\delta)(l_2 + 2\delta) \ldots (l_n + 2\delta)$. Nadert δ tot 0, dan nadert deze uitdrukking tot $l_1 \, l_2 \ldots . l_n$, d.w.z. tot den inhoud van I. Men kan dus blijkbaar δ zoo klein kiezen, dat de inhoud van I_1 minder dan ε verschilt van die van I. Op dezelfde wijze bewijst men de stellingen, die men uit de bovengenoemde verkrijgt door „open'' en „gesloten" te verwisselen en „I bevat" te vervangen door „een deel is van I".

§ 43. **Stelling.** *Is een net N een onderverdeeling van een interval I, dan is de inhoud van I gelijk aan de som van de inhouden der intervallen van het net.*

Zij het interval I gedefiniëerd door de betrekkingen:

$$a_p \leqq x_p \leqq b_p \ (p = 1, 2, \ldots . n) \quad \ldots . \quad (1)$$

Laten $c_p^{(k)}$ de definiëerende getallen van het net zijn. Men heeft dan dus voor elke waarde van p:

$$a_p < c_p^{(1)} < c_p^{(2)} < \ldots . < c_p^{(m_p)} < b_p \quad \ldots . \quad (2)$$

Hieruit volgt:

$$b_p - a_p = (c_p^{(1)} - a_p) + (c_p^{(2)} - c_p^{(1)}) + \ldots . + (b_p - c_p^{(m_p)}) \quad (3)$$

De inhoud van I is gelijk aan het product

$$(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \ldots . . (b_n - a_n) \quad . \ . \ . \ . \quad (4)$$

Substitueert men voor elke factor van dit product de uitdrukking, waaraan deze factor volgens (3) gelijk is, en werkt het product dan volgens de distributieve wet der vermenigvuldiging uit, dan ziet men, dat elke term van de verkregen som de inhoud is van één der intervallen van het net en dat de inhoud van elk dezer intervallen juist éénmaal voorkomt. Hiermede is de stelling bewezen.

§ 44. **Stelling.** *Indien een interval I overdekt wordt door een eindig aantal intervallen $I^{(k)}$, dan is de inhoud van I niet grooter dan de som der inhouden van de intervallen $I^{(k)}$.*

Door een analoge redeneering als in § 41 ziet men, dat het voldoende is, de stelling te bewijzen voor het geval, dat het overdekte interval open is, terwijl alle overdekkende intervallen afgesloten zijn.

Zij I gedefinieërd door de betrekkingen:

$$a_p < x_p < b_p \quad (p = 1, 2 \ldots . n).$$

Zij het interval $I^{(k)}$ gedefiniëerd door de betrekkingen:

$$c_p^{(k)} \leqq x_p \leqq d_p^{(k)} \quad (p = 1, 2, \ldots . n).$$

Is in deze betrekkingen $c_p^{(k)} < a_p$, dan vervangen wij $I^{(k)}$ door het interval, dat men krijgt door in deze betrekkingen $c_p^{(k)}$ door a_p te vervangen. Daar de weggelaten punten niet tot I behooren, is I ook na deze vervanging overdekt. Verder is de inhoud van het interval, dat nu in plaats van $I^{(k)}$ gekomen is, niet grooter dan die van $I^{(k)}$, en de som van de inhouden der overdekkende intervallen wordt dus door deze bewerking niet vergroot.

Evenzoo zullen wij, als $d_p^{(k)} > b_p$ is, $d_p^{(k)}$ door b_p vervangen. Wij zullen dus verder onderstellen, dat geen der getallen $c_p^{(k)} < a_p$, geen der getallen $d_p^{(k)} > b_p$ is.

Wij rangschikken nu voor elke waarde van p alle getallen a_p, b_p, $c_p^{(k)}$ en $d_p^{(k)}$ naar opklimmende grootte. Op deze wijze verkrijgt men n eindige getallenverzamelingen; deze definiëeren een net N, dat een onderverdeeling van het interval I is.

Neemt men bij een bepaalde waarde van k uit elk der n getallenverzamelingen de getallen die tusschen $c_p^{(k)}$ en $d_p^{(k)}$ $(p = 1, 2, \ldots n)$ zijn ingevoegd, dan ziet men onmiddellijk, dat de intervallen van het net N, die deelen zijn van een interval $I^{(k)}$, een net $N^{(k)}$ vormen, dat een onderverdeeling van $I^{(k)}$ is.

Omgekeerd behoort ieder interval van het net N tot minstens één der netten $N^{(k)}$. Immers een inwendig punt van zulk een interval zal als punt van I tot minstens één interval $I^{(k)}$ behooren, dus tot minstens één interval van het net $N^{(k)}$, en dit is alleen mogelijk, indien het beschouwde interval zelf tot het net $N^{(k)}$ behoort.

De som der inhouden van alle intervallen $I^{(k)}$ is nu gelijk aan de som der inhouden van alle intervallen van alle netten $N^{(k)}$. Telt men deze laatste inhouden alle bij elkander op, dan neemt men den inhoud van elk interval van het net N minstens éénmaal. De genoemde som is dus niet kleiner dan de som der inhouden van de intervallen van het net N, d.w.z. dan de inhoud van het interval I.

§ 45. Wij zullen niet alleen eindige intervalverzamelingen beschouwen, zooals in de vorige §, doch ook *aftelbare*.

Is een aftelbare verzameling van intervallen $I^{(k)}$ gegeven, dan kunnen wij de inhouden dezer intervallen als termen van een oneindig voortloopende reeks beschouwen. Daar deze inhouden alle positief zijn, zal de genoemde reeks òf divergeeren òf absoluut convergeeren. Deze divergentie of convergentie is onafhankelijk van de volgorde der termen en, in het geval van convergentie, geldt hetzelfde voor de *som* der reeks.

In plaats van „de som der reeks, die door de inhouden der intervallen $I^{(k)}$ gevormd wordt", zullen wij kortweg zeggen „de som van de inhouden der intervallen $I^{(k)}$". Is de reeks divergent, dan zullen wij zeggen, dat de som dezer inhouden $+\infty$ is.

Stelling. *Indien een interval I overdekt wordt door een aftelbare verzameling van intervallen $I^{(k)}$, dan is de inhoud van I niet grooter dan de som van de inhouden der intervallen $I^{(k)}$.*

Wij moeten bij het bewijs van deze stelling drie gevallen onderscheiden.

1⁰. Laten in de eerste plaats het interval I *gesloten* en de intervallen $I^{(k)}$ *open* zijn. Volgens de stelling van HEINE en BOREL kan men nu een *eindig* aantal intervallen $I^{(k)}$ vinden zóódanig, dat I door *deze* intervallen eveneens overdekt wordt. Volgens de vorige § is de inhoud van I niet grooter dan de som van de inhouden dezer eindig vele intervallen $I^{(k)}$. Nu is klaarblijkelijk de som van de inhouden dezer eindig vele intervallen $I^{(k)}$ kleiner dan de som der inhouden van alle intervallen $I^{(k)}$. Hiermede is de stelling voor dit geval bewezen.

2⁰. Laten in de tweede plaats het interval I *gesloten* en de intervallen $I^{(k)}$ niet alle open zijn. Zij ε een willekeurig positief getal en laten de positieve getallen $\delta_1, \delta_2, \ldots$ de termen zijn van

een oneindig voortloopende reeks, waarvan de som $\leqq \varepsilon$ is. (Bijv. $\delta_1 = \frac{\varepsilon}{2}$, $\delta_2 = \frac{\varepsilon}{4}$, enz.). Volgens § 42 kan men bij elk interval $I^{(k)}$, dat niet open is, een open interval $J^{(k)}$ vinden, dat $I^{(k)}$ bevat, en waarvan de inhoud minder dan δ_k van den inhoud van $I^{(k)}$ verschilt. Is $I^{(k)}$ open, dan nemen wij voor het interval $J^{(k)}$ $I^{(k)}$ zelf.

Het is duidelijk, dat het interval I door de intervallen $J^{(k)}$ eveneens overdekt wordt. Is verder I de som van de inhouden der intervallen $I^{(k)}$, dan is de som van de inhouden der intervallen $J^{(k)}$ niet grooter dan $S + \varepsilon$. Daar de intervallen $J^{(k)}$ open zijn, is volgens het zooeven bewezene de inhoud van I niet grooter dan $S + \varepsilon$. Daar dit voor elke waarde van ε gelden moet, is de inhoud van I niet grooter dan S, w. t. b. w.

3°. Zij thans het interval I open. Met behulp van de stellingen van § 42, vindt men, dat er een gesloten interval J bestaat, dat een deel is van I en waarvan de inhoud minder dan een gegeven positief getal ε van die van I verschilt.

Wordt het interval I door de intervallen $I^{(k)}$ overdekt, dan geldt hetzelfde voor het interval J. Zij V de inhoud van I, dan vindt men door toepassing van het reeds bewezene, dat $V - \varepsilon$ niet grooter is dan de som van de inhouden der intervallen $I^{(k)}$. Daar dit voor elke waarde van ε waar moet zijn, geldt hetzelfde voor V.

§ 46. Zij thans een *willekeurige* puntverzameling A gegeven. Wij construeeren een rij van netten N_k, waarvan ieder een onderverdeeling van alle voorafgaande is, en die verder aan de in hoofdstuk I genoemde voorwaarden voldoet. We nemen aan, dat deze netten de geheele ruimte R_n overdekken.

Daar elk net N_k uit aftelbaar vele intervallen $I_k^{(m)}$ bestaat, vormen *al* deze intervallen $I_k^{(m)}$ eveneens een aftelbare verzameling. Zij (J) een verzameling van intervallen hieruit, waardoor de puntverzameling A overdekt wordt; deze verzameling van intervallen is dan eindig of aftelbaar. Het is steeds mogelijk, zulk een verzameling (J) te vinden; zoo wordt door de intervallen $I_k^{(m)}$, die tot eenzelfde net N_k behooren, de geheele ruimte R_n overdekt, dus ook de puntverzameling A. Het is zelfs op oneindig vele wijzen mogelijk; want heeft men één zoodanige verzameling (J), en is J_l een interval hiervan, dat tot een net N_k behoort, dan kan men J_l vervangen door de deelintervallen daarvan, die tot een net N_{k+p} behooren en met A een punt gemeen hebben.

Evenals in § 45 kan men de som van de inhouden der intervallen van de verzameling (J) beschouwen; zij S deze som, welke dus eventueel $+ \infty$ is. Blijkens het voorafgaande is de verzame-

ling der getallen S niet leeg. *De onderste grens van de verzameling der getallen S noemen wij de* **maat** *van het puntverzameling A.*

Wij zullen deze maat aanduiden door het teeken mA. Daar de getallen S positief zijn, is mA positief of nul; natuurlijk kan mA ook $+\infty$ zijn.

In het voorafgaande is de maat mA van een puntverzameling A gedefiniëerd met behulp van een bepaalde rij van netten N_k. In de volgende §§ zullen wij nu bewijzen, dat de maat mA van de bijzondere keuze dezer rij onfhankelijk is, (mits de rij der netten N_k voldoet aan de, door ons steeds gemaakte, onderstellingen).

§ 47. Wij bewijzen eerst de volgende

Stelling. *De maat van een interval I is gelijk aan de inhoud van dit interval.*

In overeenstemming met de vorige § denken wij ons de maat van I gedefiniëerd met behulp van een bepaalde rij van netten N_k. Zij (J) weer een verzameling van intervallen $I_k^{(m)}$, waardoor I overdekt wordt. Volgens § 44 en § 45 is de som van de inhouden dezer intervallen $I_k^{(m)}$ niet kleiner dan de inhoud van I. Geen der getallen S van de vorige § is dus kleiner dan de inhoud van I; hetzelfde geldt dus voor de onderste grens der getallen S, dus voor de maat van I. De maat van een interval I is dus niet *kleiner* dan de inhoud van I.

Om te bewijzen, dat de maat van I niet *grooter* dan de inhoud van I is, moeten wij aantoonen, dat men steeds een verzameling (J) kan vinden, waarvan de som van de inhouden der intervallen willekeurig weinig van den inhoud van I verschilt. Bij dit bewijs zullen wij I *gesloten* onderstellen; het geldt echter met voor de hand liggende wijziging, indien I open is.

Zij I dus gedefiniëerd door de betrekkingen:

$$a_p \leqq x_p \leqq b_p \quad (p=1, 2, \ldots, n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Een net N_k van de rij, met behulp waarvan de maat van I gedefiniëerd is, wordt door n getallenverzamelingen bepaald. Laat $c_p^{(k)}$ het grootste getal van de p^{de} dezer verzamelingen zijn, dat kleiner is dan a_p; laat evenzoo $d_p^{(k)}$ het kleinste getal wezen, dat grooter is dan b_p. Door de betrekkingen:

$$c_p^{(k)} \leqq x_p \leqq d_p^{(k)} \quad (p=1, 2, \ldots, n) \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

wordt een interval I^* gedefiniëerd, waarvan I een deel is. Dit interval I^* is de vereeniging van een eindig aantal intervallen van het net N_k; daar deze intervallen het interval I overdekken,

vormen zij een verzameling (J). De som van de inhouden dezer intervallen is de inhoud van het interval I^*.

Door k groot genoeg te nemen, kan men nu de verschillen $a_p - c_p^{(k)}$ en $d_p^{(k)} - b_p$ willekeurig klein maken. De inhoud van I^* kan men dus willekeurig weinig laten verschillen van die van I, waarmede de stelling bewezen is.

§ 48. **Stelling.** *Is een puntverzameling A een deel van een puntverzameling B, dan is de maat van A niet grooter dan die van B.*

Een verzameling (J) van intervallen, die B overdekt, overdekt ook A. Zij, evenals in § 46, S de som der inhouden van de intervallen eener overdekkende verzameling. De verzameling der getallen S, die bij de puntverzameling B behooren, is nu een deel van de verzameling der getallen S, die bij puntverzameling A behooren. De onderste grens van de *eerste* verzameling van getallen S is dus niet kleiner dan die van de tweede m. a. w. de maat van B is niet kleiner dan die van A.

Stelling. *Indien een puntverzameling de vereeniging is van eindig of aftelbaar vele puntverzamelingen, is de maat dezer vereeniging niet grooter dan de som van de maten der samenstellende verzamelingen.*

Het geval van een vereeniging van eindig vele puntverzamelingen ligt opgesloten in dat van de vereeniging van aftelbaar vele, daar men aan een eindig aantal puntverzamelingen aftelbaar vele malen de leege verzameling kan toevoegen. Wij behoeven dus alleen maar het laatste geval te beschouwen.

Zij dus:

$$A = A_1 \dot{+} A_2 \dot{+} A_3 \ldots\ldots$$

Laten $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots$ aftelbaar vele positieve getallen zijn zoodanig, dat:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots\ldots$$

Bij elke puntverzameling A_k kan men nu een overdekkende intervalverzameling $(J)_k$ vinden zoodanig, dat de som van de inhouden dezer intervallen kleiner is dan $mA_k + \varepsilon_k$. De vereeniging van al deze intervalverzamelingen is een intervalverzameling (J), welke A overdekt.

Past men de theorie der dubbele reeksen met positieve termen toe, dan vindt men dat de som S der inhouden van alle intervallen van de verzameling (J) niet grooter is dan $\Sigma\,(mA_k + \varepsilon_k) = \Sigma\, mA_k + \varepsilon$.

De verzameling van de, op deze wijze gevonden, getallen S is nu een deel van de verzameling van de sommen S van de

inhouden van de intervallen van *alle* verzamelingen, die A overdekken. De onderste grens van *deze* verzameling, d. i. de *maat* van A, is dus ook niet grooter dan $\Sigma\, mA_k + \varepsilon$. En daar men ε willekeurig kan kiezen, volgt de stelling hieruit onmiddellijk.

Gevolg: De maat van een aftelbare puntverzameling is nul.

Zulk een verzameling toch is de vereeniging van aftelbaar vele verzamelingen, die ieder uit één punt bestaan, en de maat van een punt is 0, daar men het kan overdekken door een interval van willekeurig kleine afmetingen.

§ **49**. Wij bewijzen thans de

Stelling. *De maat van een puntverzameling is onafhankelijk van de rij van netten, met behulp waarvan deze maat gedefiniëerd is.*

Zij gegeven een puntverzameling V, benevens twee rijen van netten. Wij zullen de maat, die met behulp van de eerste rij gevonden wordt, door mV, die, welke met behulp van de tweede rij gevonden is, door μV aanduiden.

Is ε een willekeurig positief getal, dan kan men een verzameling van intervallen uit de netten der eerste rij vinden, die V overdekt, en waarvan de som der inhouden niet grooter is dan $mV + \varepsilon$. Deze intervallen vormen te zamen een puntverzameling V'. Volgens de vorige § is $\mu V'$ niet grooter dan de som van de maten dezer intervallen, wanneer men elk dezer maten met behulp van de tweede rij van netten berekent. Volgens § 47 is nu de maat van een interval steeds gelijk aan den inhoud van het interval; de maat $\mu V'$ is dus niet grooter dan de som van de *inhouden* der intervallen, waaruit volgt:

$$\mu V' \leqq mV + \varepsilon.$$

Daar verder V een deel is van V', heeft men:

$$\mu V \leqq \mu V' \leqq mV + \varepsilon.$$

Daar dit voor elk positief getal ε geldt, volgt hieruit, dat $\mu V \leqq mV$ is. Nu kan men echter in het voorafgaande betoog de beide rijen van netten met elkander verwisselen; men heeft dus ook $mV \leqq \mu V$. Hieruit volgt $mV = \mu V$, hetgeen te bewijzen was.

Is één der beide getallen mV en μV oneindig groot, b.v. $mV = +\infty$, dan moet ook $\mu V = +\infty$ zijn; de onderstelling toch, dat μV eindig zou zijn, voert, wegens $mV \leqq \mu V$, tot een tegenstrijdigheid.

§ **50**. Boven hebben wij reeds opgemerkt, dat de maat van een aftelbare puntverzameling steeds *nul* bedraagt. Wij zullen

thans twee andere, belangrijke voorbeelden geven van puntverzamelingen van de maat *nul.*

Stelling. *De begrenzing van een interval is een puntverzameling van de maat nul.*

Zij het interval I gedefiniëerd door de betrekkingen:

$$a_p \leqq x_p \leqq b_p \ (p = 1, 2, \ldots . n).$$

Wij beschouwen een net N_k; dit wordt door n getallenverzamelingen gedefiniëerd. Wij kiezen het net zóó, dat voor elke waarde van p de getallen a_p en b_p tot de p^{de} dezer verzamelingen behooren, en tusschen a_p en b_p minstens twee andere getallen van de p^{de} verzameling liggen. Zij $c_p^{(k)}$ het eerste getal van de p^{de} verzameling, dat op a_p volgt, en $d_p^{(k)}$ het laatste getal dat aan b_p voorafgaat. Door de betrekkingen

$$c_p^{(k)} \leqq x_p \leqq d_p^{(k)} \ (p = 1, 2, \ldots . n),$$

wordt een interval I^* gedefiniëerd. De intervallen I en I^* bestaan elk uit een zeker aantal intervallen van het net N_k, en het is duidelijk, dat de *begrenzing* van I overdekt wordt door die intervallen van N_k, die wel een deel van I, maar niet een deel van I^* zijn.

Door nu de verschillen van de opeenvolgende getallen der definiëerende getallenverzamelingen van het net N_k klein genoeg te nemen, kan men het verschil van de inhouden der intervallen I en I^* willekeurig klein maken, dus ook de som van de inhouden der overdekkende intervallen van de begrenzing van I. De onderste grens van deze som is dus nul, waarmede de stelling bewezen is.

Stelling. *Is k een natuurlijk getal, c een reëel getal, dan is de verzameling van de punten eener n-dimensionale ruimte ($n \geqq k$), waarvoor $x_k = c$ is, een puntverzameling van de maat nul.*

Laten $a_1, a_2, \ldots ., a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots . a_n$ willekeurige *geheele* getallen zijn. Door de betrekkingen:

$$\begin{aligned}
&a_1 \leqq x_1 \leqq a_1 + 1 \\
&a_2 \leqq x_2 \leqq a_2 + 1. \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{k-1} \leqq x_{k-1} \leqq a_{k-1} + 1. \\
&c \leqq x_k \leqq c + 1. \\
&a_{k+1} \leqq x_{k+1} \leqq a_{k+1} + 1. \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_n \leqq x_n \leqq a_n + 1
\end{aligned}$$

wordt een interval bepaald. Geeft men de getallen $a_1, \ldots .$ alle

mogelijke waarden, dan verkrijgt men een aftelbare verzameling van intervallen. De begrenzing van elk dezer intervallen heeft de maat nul; volgens § 48 vormen al deze begrenzingen tezamen weer een puntverzameling van de maat *nul*. Nu ziet men onmiddellijk, dat elk punt, waarvoor $x_k = c$ is, tot de begrenzing van minstens één der genoemde intervallen behoort. De verzameling der punten, waarvoor $x_k = c$ is, is dus een deel van een puntverzameling van de maat nul, en heeft dus eveneens de maat nul.

§ 51. Het belangrijkste vraagstuk uit de theorie van de maat van puntverzamelingen is het volgende: wanneer is de maat een *additieve* functie? d. w. z. wanneer is de maat van de som van twee of meer puntverzamelingen de som van de maten dier verzamelingen? (Wij herinneren eraan, dat het gebruik van de term „som van eenige puntverzamelingen" insluit, dat geen twee dezer verzamelingen een gemeenschappelijk punt hebben).

Wij bewijzen nu eerst de

Stelling. *De maat van de som van twee puntverzamelingen is gelijk aan de som hunner maten, indien de maat van minstens één der beide verzamelingen nul of oneindig is.*

Laten A en B de beide verzamelingen zijn, en zij $mB = 0$. Daar A een deel is van $A + B$, heeft men volgens § 48:

$$mA \leqq m\,(A + B).$$

Volgens de tweede stelling van § 48 is:

$$m\,(A + B) \leqq mA + mB = mA.$$

Hieruit volgt:

$$m\,(A + B) = mA = mA + mB, \text{ w. t. b. w.}$$

Is $mB = +\infty$, dan volgt uit:

$$mB \leqq m\,(A + B),$$

onmiddellijk:

$$m\,(A + B) = +\infty = mA + mB.$$

Door volledige inductie vindt men, dat de maat van de som van een eindig aantal puntverzamelingen, die alle op één na de maat nul hebben, gelijk is aan de som van de maten dier verzamelingen. Daar de tweede stelling van § 48 ook voor aftelbaar vele puntverzamelingen geldt, zal ook voor de som van *aftelbaar* vele puntverzamelingen, die alle op één na, de maat nul hebben, de maat gelijk zijn aan de som van de maten der verzamelingen.

Verder vindt men onmiddellijk, dat de maat van de som van eindige, of aftelbaar vele puntverzamelingen, waarvan minstens

één de maat $+\infty$ heeft, gelijk is aan de som van de maten dier verzamelingen.

§ 52. **Stelling.** *Indien van twee puntverzamelingen A en B de eerste een deel is van een open interval I, en de tweede geen enkel punt gemeen heeft met het afgesloten interval $\overline{I}$, dat uit I en de begrenzing daarvan bestaat, is de maat van $A+B$ gelijk aan de som van de maten van A* en *B.*

Alvorens tot het bewijs van deze stelling over te gaan, zullen wij even terugkomen op de definitie van de maat in § 46.

De maat mA is daar gedefiniëerd als de onderste grens van de verzameling der sommen S van de inhouden der intervallen van overdekkende intervalverzamelingen (J). Deze intervalverzamelingen (J) waren gekozen uit een rij van netten N_k.

Indien nu de punten van A inwendige punten zijn van een interval I^* van het net N_1, zullen de intervallen van een verzameling (J) deels deelintervallen van I^* zijn, deels geen inwendig punt met I^* gemeen hebben, en dus geen enkel punt gemeen hebben met A.

Laat men nu de laatste intervallen van (J) weg, dan blijft (J) de puntverzameling A overdekken, terwijl de som S van de inhouden der intervallen van (J) door dit weglaten verkleind wordt.

Beperkt men zich nu bij de definitie van mA tot die verzamelingen (J), waarvan alle intervallen deelintervallen zijn van I^*, dan laat men uit de verzameling der getallen S alleen getallen weg, die minstens één ander getal van dezelfde verzameling overtreffen. Men bewijst gemakkelijk, dat de onderste grens van deze verzameling door dit weglaten niet gewijzigd wordt, m. a. w., dat men voor de maat mA dezelfde waarde vindt.

Geheel analoge beschouwingen gelden, wanneer men een puntverzameling B beschouwt, die met een interval I^* van N_1 geen enkel punt gemeen heeft; men kan zich dan beperken tot verzamelingen (J), waarvan geen enkel interval een deel van I^* is.

Beschouwen wij nu twee puntverzamelingen A en B, die aan de boven gemaakte veronderstellingen voldoen. Wij nemen een rij van netten N_k zóódanig, dat $\overline{I}$ een interval van N_1 is. Een intervalverzameling (J), die $A+B$ overdekt, bestaat uit een verzameling (J_1), waarvan alle intervallen tot $\overline{I}$ behooren, en een verzameling (J_2), waarvan geen enkel interval tot $\overline{I}$ behoort. De verzameling (J_1) overdekt A, de verzameling (J_2) overdekt B. Zij S de som van de inhouden der intervallen van (J), S_1 die der intervallen van (J_1), S_2 die der intervallen van (J_2). Men heeft dan:

$$S = S_1 + S_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

De onderste grens van de getallen S is $m(A+B)$, die der getallen S_1 is mA, die der getallen S_2 is mB. Nu is (J) een *willekeurige*, overdekkende verzameling van $A+B$; men kan dus S tot zijn onderste grens doen naderen, waaruit volgt:

$$m(A+B) \geqq mA + mB \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Nu kan men voor (J_1) een *willekeurige* overdekkende verzameling van A kiezen, waarvan alle intervallen tot $\overline{I}$ behooren, en voor (J_2) een *willekeurige* overdekkende verzameling van B, waarvan geen enkel interval tot $\overline{I}$ behoort. Men kan dus in de vergelijking (1) ook elk der getallen S_1 en S_2 tot hun onderste grens laten naderen, waaruit volgt:

$$m(A+B) \leqq mA + mB \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Uit de vergelijkingen (2) en (3) volgt het gestelde onmiddellijk.

§ 53. **Stelling.** *Indien van twee puntverzamelingen A en B de eerste een deel is van een gesloten interval $\overline{I}$, en de tweede met $\overline{I}$ geen enkel punt gemeen heeft, is de maat van $A+B$ gelijk aan de som der maten van A en B.*

Zij I het interval, dat uit $\overline{I}$ ontstaat, als men de begrenzing van $\overline{I}$ weglaat. Men heeft dan:

$$A = AI + A(\overline{I} - I).$$

De puntverzamelingen AI en B voldoen aan de onderstelling van de vorige §.

Men heeft dus:

$$m(AI + B) = mAI + mB.$$

Daar $\overline{I} - I$ volgens § 50 de maat *nul* heeft, geldt hetzelfde voor $A(\overline{I} - I)$. Volgens § 51 heeft men dus:

$$m\{AI + A(\overline{I} - I) + B\} = m(AI + B) = mAI + mB.$$

Evenzoo is

$$m\{AI + A(\overline{I} - I)\} = mAI = mA.$$

Uit deze formules volgt:

$$m(A+B) = mA + mB, \text{ wat te bewijzen was.}$$

Stelling. *Indien van twee puntverzamelingen A en B de eerste een deel is van een open interval I en de tweede met I geen enkel punt gemeen heeft, is de maat van $A+B$ gelijk aan de som der maten van A en B.*

Het bewijs verloopt analoog aan het vorige. Men splitst B in haar doorsnede met de begrenzing van I en een restverzameling.

De eerste dezer twee deelen heeft de maat *nul*, de tweede voldoet met A aan de onderstelling van de vorige §.

§ 54. De eigenschap, die in de vorige § een open en gesloten interval bleken te bezitten, geldt voor een belangrijke klasse van puntverzamelingen, die men *meetbare* puntverzamelingen noemt. Wij definiëeren deze verzamelingen als volgt:

een puntverzameling V heet meetbaar, indien een willekeurige deelverzameling A van V en een willekeurige verzameling B, die met V geen enkel punt gemeen heeft, steeds voldoen aan de voorwaarde: $m(A+B)=mA+mB$.

Stelt men $A+B=U$, dan wordt $A=UV$ en $B=U-UV$. De formule luidt dan:

$$mU = mUV + m(U-UV).$$

De verzameling V is dus meetbaar, indien deze formule voor elke verzameling U geldt.

De uitkomsten van de vorige § kan men nu als volgt uitdrukken:

Een afgesloten en een open interval zijn beide meetbare puntverzamelingen.

Een ander eenvoudig voorbeeld wordt ons geleverd door de volgende

Stelling. *Een puntverzameling van de maat* **nul** *is meetbaar.*

Is n.l. $mV=nul$, dan is ook $mUV=nul$, daar UV een deel van V is. Dan volgt de bovenstaande formule direct uit de stelling van § 51.

§ 55. De klasse der meetbare puntverzamelingen is zeer uitgebreid. Wij zullen n.l. in de eerstvolgende § bewijzen, dat, door de gewone bewerkingen die men op puntverzamelingen toepast, uit meetbare puntverzamelingen steeds weer meetbare puntverzamelingen ontstaan.

Stelling. *De doorsnede van twee meetbare puntverzamelingen is weer een meetbare puntverzameling.*

Laten A en B twee meetbare puntverzamelingen zijn, U een willekeurige puntverzameling. Wij kunnen de puntverzameling U splitsen in de volgende vier deelen:

1°. De verzameling U_1 der punten van U, die zoowel tot A als tot B behooren; men heeft blijkbaar $U_1=ABU$,

2°. De verzameling U_2 der punten van U, die wèl tot A, doch nièt tot B behooren; men kan schrijven $U_2=AU-ABU$.

3°. De verzameling U_3 der punten van U, die wèl tot B, doch nièt tot A behooren; men kan schrijven $U_3=BU-ABU$.

4^0. De verzameling U_4 der punten van U, die nòch tot A, nòch tot B behooren; men kan schrijven

$$U_4 = (U - AU) - (BU - ABU).$$

Daar de verzameling A meetbaar is, heeft men:

$$mU = mAU + m(U - AU) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Uit de meetbaarheid van B volgt, indien men, in plaats van de verzameling U, de verzameling AU neemt:

$$mAU = mABU + m(AU - ABU) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Evenzoo volgt uit de meetbaarheid van B voor de verzameling $U - AU$:

$$m(U - AU) = m(BU - ABU) +$$
$$+ m\{(U - AU) - (BU - ABU)\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Uit de formules (1), (2) en (3) volgt:

$$mU = mU_1 + mU_2 + mU_3 + mU_4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Nu is U_2 een deel van A, terwijl U_4 met A geen enkel punt gemeen heeft. Wegens de meetbaarheid van A is dus:

$$m(U_2 + U_4) = mU_2 + mU_4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

De verzameling U_3 is een deel van B, terwijl $U_2 + U_4$ met B geen enkel punt gemeen heeft.

Wegens de meetbaarheid van B heeft men dus:

$$m(U_2 + U_3 + U_4) = m(U_2 + U_4) + mU_3. \quad . \quad . \quad (6)$$

Uit de formules (4), (5) en (6) volgt:

$$mU = mU_1 + m(U_2 + U_3 + U_4)$$

of:

$$mU = mABU + m(U - ABU),$$

waarmede de meetbaarheid van AB bewezen is.

§ 56. **Stelling.** *De complementairverzameling van een meetbare puntverzameling is weer meetbaar.*

Een puntverzameling V is meetbaar, indien:

$$m(A + B) = mA + mB,$$

zoodra A een deel van V is en B met V geen enkel punt gemeen heeft. Men kan dit nu echter ook zóó uitdrukken, dat A met de complementairverzameling van V geen enkel punt gemeen heeft en B een deel van die complementairverzameling is. Men ziet dan, dat de voorwaarde voor de meetbaarheid van V identiek is met de voorwaarde van de meetbaarheid harer complementairverzameling.

Stelling. *De vereeniging van twee meetbare puntverzamelingen is weer meetbaar.*

Deze vereeniging toch is de complementairverzameling van de doorsnede van de complementairverzamelingen der gegeven verzamelingen, en volgens de vorige § is deze doorsnede meetbaar.

Door volledige inductie vindt men uit de stellingen van deze en van de vorige §, dat de vereeniging en de doorsnede van eindig vele, meetbare puntverzamelingen weer meetbaar zijn.

§ 57. **Stelling.** *De doorsnede van aftelbaar vele, meetbare puntverzamelingen is weer meetbaar.*

Laten A_1, A_2, ... de gegeven meetbare puntverzamelingen zijn, U een willekeurige puntverzameling, waarvan de maat eindig is. Zij

$$B_1 = A_1,\ B_2 = A_2 B_1, \ldots .\ B_k = A_k B_{k-1}.$$

De puntverzamelingen B_k zijn volgens § 55 alle meetbaar. Zij D de doorsnede van de puntverzamelingen A_k. Elk punt van D behoort dan tot alle puntverzamelingen A_k, dus ook tot alle puntverzamelingen B_k. Behoort omgekeerd een punt tot alle puntverzamelingen B_k, dan behoort het, zooals men onmiddellijk ziet, ook tot alle puntverzamelingen A_k. De puntverzameling D is dus ook de doorsnede van alle puntverzamelingen B_k.

Elk der puntverzamelingen B_k is een deel van alle voorafgaande. De puntverzamelingen UB_k vormen rij, waarvoor hetzelfde geldt; volgens § 48 vormen de maten dezer laatste puntverzamelingen een niet-stijgende rij van positieve getallen, welke dus convergeert tot een zekere limiet μ.

De puntverzameling UD is een deel van elk der puntverzamelingen UB_k; haar maat is dus ook niet grooter dan die van een dezer laatste verzamelingen, en dus ook:

$$mUD \leqq \mu \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (1)$$

Wij zullen aantoonen, dat in deze formule het teeken $\leqq$ vervangen kan worden door het teeken $=$. Hiertoe gaan wij als volgt te werk:

De puntverzameling UB_1 is de som van UD (d. w. z. de verzameling der punten, die tot *alle* puntverzamelingen UB_k behooren), en van de aftelbare rij van de verzamelingen der punten, die wèl behooren tot een puntverzameling UB_k, maar *niet* tot de daaropvolgende UB_{k+1}; of in formule:

$$UB_1 = UD + (UB_1 - UB_2) + (UB_2 - UB_3) + \ldots \quad (2)$$

Volgens § 48 is de maat van de som van eindig of aftelbaar

vele puntverzamelingen, niet grooter dan de som van de maten dezer verzamelingen.

Men heeft dus:

$$mUB_1 \leqq mUD + m(UB_1 - UB_2) + m(UB_2 - UB_3) + \ldots . \quad (3)$$

Daar de puntverzamelingen UB_k meetbaar zijn, heeft men:

$$mUB_k = mUB_{k+1} + m(UB_k - UB_{k+1}) \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Hieruit volgt:

$$mUB_1 \leqq mUD + (mUB_1 - mUB_2) + \\ + (mUB_2 - mUB) + \ldots . \leqq mUD + mUB_1 - \mu \quad . \quad . \quad (5)$$

Uit de formules (1) en (5) volgt:

$$mUD = \mu.$$

Zij $C_k = U - UB_k$. Daar elk der puntverzamelingen UB_k een deel is van het voorafgaande, zal elk der puntverzamelingen C_k alle voorafgaande bevatten en een deel zijn van alle volgende. De maten der puntverzamelingen C_k vormen dus een niet-afnemende rij getallen, die convergeeren tot een limiet μ'.

De puntverzameling $U - UD$ bevat alle puntverzamelingen C_k; men heeft dus:

$$m(U - UD) \geqq \mu' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

De puntverzameling $U - UD$ bevat de punten, die wèl behooren tot U, doch niet tot alle B_k.

Zij is dus de som van de verzameling der punten van U, die tot geen enkele B_k behooren, (dit is juist C_1) en van de aftelbare rij der verzamelingen van punten van U, die wel tot een zekere B_k, doch niet tot B_{k+1} behooren, d. w. z van de verzamelingen $C_{k+1} - C_k$.

Hieruit volgt:

$$m(U - UD) \leqq mC_1 + m(C_2 - C_1) + m(C_3 - C) + \ldots . \quad (7)$$

Daar de puntverzamelingen C_k meetbaar zijn, heeft men:

$$mC_{k+1} = mC_k + m(C_{k+1} - C_k) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Hieruit volgt:

$$m(U - UD) \leqq mC_1 + (mC_2 - mC_1) + (mC_3 - mC_2) + \ldots \leqq \mu'. \quad (9)$$

Uit de formules (6) en (9) volgt:

$$m(U - UD) = \mu' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Wegens de meetbaarheid van elk der verzamelingen B_k heeft men ten slotte:

$$mU = mUB_k + m(U - UB_k) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Laat men in deze formule k de rij der natuurlijke getallen doorloopen, dan nadert de eerste term van het rechterlid tot $\mu = mUD$, de tweede term tot $\mu' = m(U - UD)$. Men heeft dus:

$$mU = mUD + m(U - UD).$$

Deze formule leert ons de meetbaarheid van D, welke te bewijzen was.

§ 58. **Stelling.** *De vereeniging van aftelbaar vele, meetbare puntverzamelingen is weer meetbaar.*

Volgens § 56 toch zijn de complementairverzamelingen der gegeven puntverzamelingen ook meetbaar; hun doorsnede is dit volgens § 57 dus ook.

De bovengenoemde vereeniging is nu de complementairverzameling dezer doorsnede en dus ook weer meetbaar.

Uit deze stelling volgt onmiddellijk de volgende:

Stelling. *Elke open puntverzameling is meetbaar.*

Volgens § 30 toch is elke open puntverzameling de vereeniging van aftelbaar vele, gesloten intervallen en volgens § 54 is elk dezer intervallen meetbaar.

Stelling. *Elke afgesloten puntverzameling is meetbaar.*

Een afgesloten puntverzameling is n.l. de complementairverzameling van een opene.

Stelling. *Een puntverzameling, die een inwendige of uitwendige grensverzameling is, is meetbaar.*

Uit de voorafgaande stellingen blijkt n.l., dat een uitwendige grensverzameling de vereeniging, een inwendige grensverzameling de doorsnede is van aftelbaar vele, meetbare puntverzamelingen.

Gaat men weer eindig of aftelbaar vele, uit- of inwendige grensverzamelingen met elkander vereenigen of snijden, dan krijgt men weer meetbare puntverzamelingen, en evenzoo, als men dit procédé voortzet. De aldus verkregen puntverzamelingen heeten volgens § 39 puntverzamelingen van Borel. Men kan dus de stelling uitspreken:

Stelling. *Elke puntverzameling van Borel is meetbaar.*

§ 59. In de voorafgaande §§ hebben wij gezien, dat de eigenschap der meetbaarheid behouden blijft, indien men op meetbare puntverzamelingen, de gewone bewerkingen toepast. Wij zullen thans onderzoeken, wat er met de numerieke waarde van de maat bij deze bewerkingen gebeurt.

Stelling. *De maat van de som van twee puntverzamelingen, waarvan minstens één meetbaar is, is gelijk aan de som van de maten dezer puntverzamelingen.*

Laten A en B de beide puntverzamelingen zijn, U haar som. Zij A meetbaar. Daar A en B geen enkel punt gemeen hebben, (volgens de definitie van „som”), kan men schrijven:

$$A = AU, \; B = U - AU.$$

Volgens de definitie der meetbaarheid van A heeft men nu:

$$mU = mAU + m(U - AU),$$

dus:

$$m(A + B) = mA + mB.$$

Door volledige inductie vindt men de

Stelling. *De maat van de som van een eindig aantal puntverzamelingen, waarvan hoogstens één niet meetbaar is, is gelijk aan de som van de maten dier verzamelingen.*

Stelling. *De maat van de som van een aftelbaar aantal meetbare puntverzamelingen is gelijk aan de som van de som van de maten dier verzamelingen.*

Laten A_1, $A_2, \ldots.$ de gegeven puntverzamelingen zijn, en zij:

$$S = A_1 + A_2 + \ldots. \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Volgens § 48 heeft men:

$$mS \leqq mA_1 + mA_2 + \ldots. \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

De puntverzameling $A_1 + A_2 + \ldots. + A_k$ is een deel van S. Volgens § 48 heeft men dus:

$$mS \geqq m(A_1 + A_2 + \ldots. + A_k) \geqq mA_1 + mA_2 + \ldots. + mA_k. \quad (3)$$

Laat men in deze laatste formule k de rij der natuurlijke getallen doorloopen, dan vindt men, dat mS niet kleiner is dan de som van de maten van alle puntverzamelingen A_k. Hieruit en uit form. (2) volgt de te bewijzen stelling.

§ 60. **Stelling**. *Is een aftelbare rij van meetbare puntverzamelingen gegeven, waarvan ieder een deel van alle volgende is, (en die dus convergeert), dan is de maat van de limietverzameling gelijk aan de limiet van de maten der afzonderlijke verzamelingen.*

Laten A_1, $A_2, \ldots.$ de opeenvolgende verzamelingen zijn, V haar vereeniging of de limietverzameling der rij (zie § 36, vraagstuk 16). Men heeft dan:

$$mV \geqq mA_k.$$

Is vanaf een zekere waarde van k de maat $mA_k = +\infty$, dan is de stelling zeker waar. In het tegenovergestelde geval kan men schrijven:

$$V = A_1 + (A_2 - A_1) + (A_3 - A_2) + \ldots.$$

Door toepassing van de laatste stelling van de vorige § vindt men:

$$mV = mA_1 + m(A_2 - A_1) + m(A_3 - A_2) + \dots.$$

en hieruit volgt de stelling gemakkelijk.

Stelling. *Is een aftelbare rij van meetbare puntverzamelingen gegeven, waarvan ieder een deel van alle voorafgaande is, dan is de maat van de limietverzameling gelijk aan de limiet van de maten der afzonderlijke verzamelingen, indien deze maten alle eindig zijn.*

Laten $A_1, A_2, \dots,$ de afzonderlijke puntverzamelingen zijn, D de limietverzameling, welke de doorsnede is van $A_1, A_2, \dots$ enz. De rij der puntverzamelingen $A_1, A_2, \dots$ stemt nu geheel overeen met de rij $UB_1, UB_2, \dots$ van § 57. In § 57 is nu bewezen, dat de maat van de limiet UD der puntverzamelingen UB_k de limiet van de maten der UB_k is. Hetzelfde geldt dus van de maat van D ten opzichte van de maten der A_k, waarmee de stelling bewezen is.

Zijn de maten van de puntverzamelingen der gegeven rij alleen maar eindig vanaf een zekere waarde van den index k, dan kan men de verzamelingen met oneindige maat weglaten, zonder dat men één der genoemde limieten verandert; de stelling geldt dan dus ook.

Zijn de genoemde maten echter *alle* oneindig groot, dan geldt het bewijs van § 57 niet meer. Immers in de formule (3) kan men de uitdrukking $m(UB_1 - UB_2)$ alleen dan door $mUB_1 - mUB_2$ vervangen, als de maat mUB_2 eindig is.

Gemakkelijk kan men ook door een voorbeeld aantoonen, dat in het laatstbedoelde geval de stelling niet doorgaat. Zij n.l. A_k de vereeniging der verzamelingen C_{kn}, die bestaan uit de punten eener R_1, welke voldoen aan de betrekking:

$$n \leqq x \leqq n + \frac{1}{k} \cdot \quad (n = \text{een natuurlijk getal}).$$

Elke puntverzameling C_{kn} is een gesloten interval, waarvan de maat $= \frac{1}{k}$ is. Elke puntverzameling A_k is de vereeniging van aftelbaar vele, even groote intervallen en heeft dus een maat $= + \infty$. De verzameling D bestaat uit de punten, waarvoor $x =$ een natuurlijk getal is; zij is dus aftelbaar en dus van de maat *nul*.

§ 61. Zij gegeven een aftelbare rij van meetbare puntverzamelingen $A_k (k = 1, 2, \dots)$. Wij zullen onderstellen, dat de *vereeniging* van al deze puntverzamelingen een *eindige* maat heeft.

Zij B_p de vereeniging van alle puntverzamelingen A_k, welker index $k > p$ is. Men heeft dan:

$$mB_p \geqq mA_k \ (k \geqq p) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Is G_p de bovenste grens der getallen $mA_k \ (k \geqq p)$, dan heeft men dus:

$$mB_p \geqq G_p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Laat men in deze formule p de rij der natuurlijke getallen doorloopen, dan zullen beide leden der formule niet toenemen. Daar B_p een deel is van de vereeniging van *alle* puntverzamelingen A_k, en dus ook een eindige maat heeft, zal het linkerlid volgens de uitkomsten der vorige § convergeeren tot de maat van de puntverzameling, welke de doorsnede is van alle puntverzamelingen B_p, en die wij in § 36 de *bovenste limiet* van de rij der puntverzamelingen A_k genoemd hebben. De getallen G_p naderen tot de bovenste limiet van de rij der getallen mA_k. Men heeft dus:

Stelling. *De maat van de bovenste limiet van een rij meetbare puntverzamelingen, welker vereeniging een eindige maat heeft, is niet kleiner dan de bovenste limiet van de rij der maten dezer verzamelingen.*

Dat men de beperkende voorwaarde, die in deze stelling genoemd wordt, niet mag weglaten, blijkt uit het voorbeeld, dat aan het slot van de vorige § beproken werd. Dat de maat van de bovenste limiet wel degelijk grooter kan zijn dan de bovenste limiet der maten, blijkt uit het volgende voorbeeld:

Zij A_k voor k oneven het één-dimensionale interval $0 \leqq x \leqq 2$; voor k even het interval $1 \leqq x \leqq 3$. Al deze puntverzamelingen A_k hebben haar maat $= 1$; dit is dus ook de waarde van de bovenste limiet der maten. Daarentegen is de bovenste limiet van de rij der A_k het interval $0 \leqq x \leqq 3$, waarvan de maat $= 3$.

§ **62.** Zij weer gegeven een rij van puntverzamelingen A_k. Zij C_p de doorsnede van alle puntverzamelingen A_k, waarvoor $k \geqq p$. Men heeft dan:

$$mC_p \leqq mA_k \ (k \geqq p) . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Zij g_p de onderste grens der getallen $mA_k \ (k \geqq p)$, dan heeft men dus:

$$mC_p \leqq g_p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Laat men in deze formule p de rij der natuurlijke getallen doorloopen, dan kunnen beide leden der formule niet afnemen. Het linkerlid nadert volgens de uitkomsten van par. 60 tot de maat van de vereeniging van alle puntverzamelingen C_p, welke wij in § 36 de *onderste limiet* van de rij A_k genoemd hebben.

De getallen g_p naderen tot de onderste limiet van de rij der getallen mA_k. Men heeft dus:

Stelling. *De maat van de onderste limiet van een rij meetbare puntverzamelingen is niet grooter dan de onderste limiet van de rij der maten dezer verzamelingen.*

Dat de maat van de onderste limiet kleiner kan zijn dan de onderste limiet van de rij der maten, blijkt uit het voorbeeld aan het slot van de vorige §.

Convergeert de rij der puntverzamelingen A_k, dan zijn bovenste en onderste limiet dezer rij identiek, en hebben dus dezelfde maat. Uit de beide laatste stellingen volgt dan, dat de bovenste en onderste limiet van de rij der maten ook aan elkander gelijk zijn, en dat deze rij dus convergeert tot de maat van de limietverzameling. Men heeft dus:

Stelling. *Is een convergente rij van meetbare puntverzamelingen gegeven, welker vereeniging een eindige maat heeft, dan is de maat van de limietverzameling gelijk aan de limiet van de maten der verzamelingen.*

§ **63.** Wij kunnen aan de uitkomsten van de vorige § nog een uitbreiding geven.

Zij weer gegeven een rij van meetbare puntverzamelingen A_k. Wij zullen thans *niet* onderstellen, dat de vereeniging dezer puntverzamelingen een eindige maat heeft; in plaats daarvan onderstellen wij het volgende:

Bij elk positief getal ε *kan men een meetbare puntverzameling* U *vinden, waarvan de maat eindig is, en die eigenschap heeft, dat voor elke waarde van* k:

$$m(A_k - UA_k) < \varepsilon.$$

Wij beschouwen een monotone, niet-stijgende rij van positieve getallen ε_h $(h = 1, 2, \ldots)$, die 0 tot limiet heeft. Bij elk getal ε_h kan men volgens de onderstelling een puntverzameling U_h vinden van eindige maat, zóódanig, dat:

$$m(A_k - U_h A_k) < \varepsilon_h.$$

Daar de vereeniging van de puntverzamelingen $U_h A_k$, die bij eenzelfde waarde van h behooren, een deel is van U_h, en dus een eindige maat heeft, heeft men volgens de vorige §:

$$m \underline{\lim}_{k=\infty} U_h A_k \leqq \underline{\lim}_{k=\infty} m U_h A_k \leqq \overline{\lim}_{k=\infty} m U_h A_k \leqq m \overline{\lim}_{k=\infty} U_h A_k \qquad (1),$$

waarin het teeken $\underline{\lim}$ de onderste limiet, het teeken $\overline{\lim}$ de bovenste limiet aanduidt.

Wij merken op, dat, wanneer een puntverzameling U_h aan de bovengemaakte onderstelling voldoet, deze ook zal gelden voor elke puntverzameling van eindige maat, die U_h bevat.

Wij maken nu omtrent de puntverzamelingen U_h nog de onderstelling, *dat ieder van haar een deel van alle volgende is en dat haar vereeniging de geheele ruimte R_n is.* Voldoet de oorspronkelijke rij van puntverzamelingen U_h niet aan deze onderstelling, dan vervangen wij de puntverzamelingen U_h door haar vereenigingen met de overeenkomstige elementen eener rij meetbare puntverzamelingen van eindige maat, (bijv. een rij intervallen), welker vereeniging de geheele ruimte R_n is; verder vereenigen wij elke puntverzameling U_h met alle voorafgaande van de rij.

Laten wij nu in de ongelijkheden (1) de index h de rij der natuurlijke getallen doorloopen, dan ziet men gemakkelijk, dat de vier termen niet afnemen. Wij zullen aantoonen, dat hun limieten zijn de overeenkomstige limieten, die bij de rij der puntverzamelingen A_k behooren.

a. Een punt van $\underline{\lim}_{k=\infty} A_k$ behoort vanaf een zekere waarde van k tot alle puntverzamelingen A_k. Uit de onderstellingen, die wij omtrent de rij der U_h gemaakt hebben, volgt, dat het punt vanaf een zekere h tot alle puntverzamelingen U_h behoort; vanaf een zekere waarde van h behoort het dus tot alle puntverzamelingen $\underline{\lim}_{k=\infty} U_hA_k$. Hieruit volgt:

$$\lim_{h=\infty} \underline{\lim}_{k=\infty} U_hA_k = \underline{\lim}_{k=\infty} A_k.$$

Daar elke puntverzameling $\underline{\lim}_{k=\infty} U_hA_k$ een deel is van alle, die bij een grootere waarde van h behooren, heeft men volgens § 60:

$$\lim_{h=\infty} m \underline{\lim}_{k=\infty} U_hA_k = m \underline{\lim}_{k=\infty} A_k.$$

b. Uit het onderstelde volgt, dat voor een gegeven waarde van h de getallen mA_k en mU_hA_k minder dan ε_h van elkander verschillen. Dit geldt dus ook voor de onderste grenzen dezer getallen. Evenzoo, wanneer men alleen waarden van k beschouwt, die grooter dan een bepaald bedrag zijn. Hieruit volgt, dat het ook voor de onderste *limieten* dezer getallenrijen geldt, dat men m. a. w. heeft:

$$\underline{\lim}_{k=\infty} mU_hA_k \leqq \underline{\lim}_{k=\infty} mA_k \leqq \underline{\lim}_{k=\infty} mU_hA_k + \varepsilon_h.$$

Daar ε_h tot 0 nadert, heeft men dus:

$$\lim_{h=\infty} \underline{\lim}_{k=\infty} mU_hA_k = \underline{\lim}_{k=\infty} mA_k.$$

Op analoge wijze bewijst men de overeenkomstige uitkomsten

voor de beide andere leden der ongelijkheden (1). Men heeft dus:

$$m \underline{\lim}_{k=\infty} A_k \leqq \underline{\lim}_{k=\infty} mA_k \leqq \overline{\lim}_{k=\infty} mA_k \leqq m \overline{\lim}_{k=\infty} A_k,$$

wat te bewijzen was.

§ **64.** Met behulp van de uitkomsten der vorige § kunnen wij van verschillende puntverzamelingen de maat bepalen.

a. Aan het slot van § 37 hebben wij een open puntverzameling U geconstrueerd in een één-dimensionale ruimte, welke overal dicht lag op het interval $I: 0 \leqq x \leqq 1$. Hiertoe verdeelden wij dit interval in 3 gelijke deelen en kozen het middelste interval uit; elk der beide overige deelintervallen verdeelden wij weer in drie gelijke deelen, en kozen weer het middelste deel uit, en gingen zoo voort. De puntverzameling U werd nu gevormd door de inwendige punten van alle uitgekozen intervallen.

U bestaat dus uit één interval van de lengte $\frac{1}{3}$, twee intervallen van de lengte $\frac{1}{9}$, 4 intervallen van de lengte $\frac{1}{27}$, enz. Volgens § 59 is dus:

$$mU = \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{9} + \tfrac{4}{27} + \ldots. = 1.$$

De puntverzameling $I - U = A$ is nergens dicht en perfect; zij bestaat uit alle getallen, welke men kan schrijven als oneindig voortloopende driedeelige breuken, die het cijfer 1 niet bevatten. Men heeft nu:

$$mA = mI - mU = 0.$$

b. Iets algemeener kunnen wij een op het interval I overal dicht liggende, open puntverzameling U als volgt construeeren. Wij verdeelen I in n_1 gelijke deelen (n_1 oneven, evenals alle volgende getallen n_k); en kiezen het middelste hiervan uit. Elk der overige verdeelen wij weer in n_2 gelijke deelen, waarvan wij het middelste uitkiezen, en gaan aldus voort. U bestaat nu weer uit de inwendige punten der uitgekozen intervallen. Voor de maat van U vindt men nu:

$$\frac{1}{n_1} + \frac{n_1 - 1}{n_1 n_2} + \frac{n_1(n_2 - 1)}{n_1 n_2 n_3} + \ldots\ldots =$$

$$= \frac{1}{n_1} + \frac{n_1 - 1}{n_1 n_2} + \frac{n_2 - 1}{n_2 n_3} + \frac{n_3 - 1}{n_3 n_4} + \ldots\ldots$$

Neemt men bijv. $n_k = 3^k$, dan vindt men voor de maat van U het getal $\frac{11}{24}$. De verzameling $A = I - U$, die weer nergens dicht en perfect is, heeft dus de maat $\frac{13}{24}$.

c. Volgens § 48 vormen de meetbare getallen tusschen 0 en 1 een verzameling van de maat 0, daar zij aftelbaar is. De on-

meetbare getallen tusschen 0 en 1 vormen dus een verzameling van de maat 1.

d. De lezer beproeve, de maten te bepalen van de verschillende één-dimensionale verzamelingen, die in de vraagstukken bij § 37 en § 38 genoemd zijn.

e. Laten in een R_2 drie punten (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) gegeven zijn. De verzameling der punten:

$$x_1 = \lambda_a a_1 + \lambda_b b_1 + \lambda_c c_1$$

$$x_2 = \lambda_a a_2 + \lambda_b b_2 + \lambda_c c_2,$$

waarin:

$$\lambda_a + \lambda_b + \lambda_c = 1, \quad 0 \leqq \lambda_a \leqq 1, \quad 0 \leqq \lambda_b \leqq 1, \quad 0 \leqq \lambda_c \leqq 1$$

noemen wij een *driehoek*, die de drie gegeven punten tot *hoekpunten* heeft. De punten van den driehoek, waarvoor $\lambda_a = 0$, of $\lambda_b = 0$, of $\lambda_c = 0$, vormen de *zijden* van den driehoek. De lezer bewijze, dat een driehoek een afgesloten puntverzameling is, terwijl de punten van den driehoek, die niet tot een der zijden behooren, een open puntverzameling vormen.

Om nu de maat van een driehoek te bepalen, beschouwen wij eerst het bijzondere geval, dat $a_2 = b_2$ en $a_2 < c_2$. Wij denken ons verder de notatie zoodanig gekozen, dat $a_1 < b_1$ is. Stellen wij $c_2 - a_2 = h$, en beschouwen wij de punten van den driehoek, waarvoor:

$$x_2 = a_2 + ph \quad (0 \leqq p \leqq 1).$$

Voor deze punten is $\lambda_c = p$, $\lambda_a + \lambda_b = 1 - p$. Hieruit volgt, dat voor deze punten:

$$a_1 (1 - p) + pc_1 \leqq x_1 \leqq b_1 (1 - p) + pc_1.$$

Beschouwen wij nu de rij van intervallen:

$$a_1 + \frac{k}{n} (c_1 - a_1) \leqq x_1 \leqq b_1 - \frac{k}{n} (b_1 - c_1),$$

$$a_2 + \frac{k}{n} h \leqq x_2 \leqq a_2 + \frac{k+1}{n} h,$$

waarin n een natuurlijk getal voorstelt en k de rij der geheele getallen van 0 tot en met $n - 1$ doorloopt.

Met behulp van het bovenstaande vindt men gemakkelijk, dat ieder punt van den driehoek tot minstens één der intervallen van deze rij behoort, zoodat hun vereeniging den driehoek bevat. Verder hebben twee intervallen van de rij hoogstens een deel van hun begrenzing gemeen, welke volgens § 50 de maat 0 heeft. Hieruit volgt, dat de maat van de vereeniging dezer inter-

vallen gelijk is aan de som van hunne maten, en dus gelijk is aan:

$$(b_1 - a_1)\frac{h}{n} + (b_1 - a_1)\left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{h}{n} + (b_1 - a_1)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\frac{h}{n} + \\ + \ldots\ldots = \frac{h}{2}(b_1 - a_2)\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

In de tweede plaats beschouwen wij de rij van intervallen:

$$a_1 + \frac{k+1}{n}(c_1 - a_1) \leqq x_1 \leqq b_1 - \frac{k+1}{n}(b_1 - c_1)$$

$$a_2 + \frac{k}{n} h \leqq x_2 \leqq a_2 + \frac{k+1}{n} h.$$

Ieder punt van één dezer intervallen behoort tot den driehoek, welke dus ook de vereeniging dezer intervallen bevat. Voor de maat van deze vereeniging vindt men $\frac{h}{2}(b_1 - a_1)\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

De maat van den driehoek ligt voor elke waarde van n tusschen de maten dezer intervalverzamelingen in, zij bedraagt dus: $\frac{h}{2}(b_1 - a_1)$.

Daar $h = c_2 - a_2$, verifiëert men gemakkelijk, dat men voor deze uitkomst kan schrijven:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}$$

In de tweede plaats beschouwen wij nu het geval, dat $a_2 = b_2$ en $a_2 > c_2$. Wij kunnen de voorgaande berekeningen herhalen met dit onderscheid evenwel, dat h negatief wordt. De maten der beide intervalverzamelingen worden dan dus

$$-\frac{h}{2}(b_1 - a_1)\left(1 + \frac{1}{n}\right) \text{ en } -\frac{h}{2}(b_1 - a_1)\left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

de maat van den driehoek $-\frac{h}{2}(b_1 - a_1)$, waarvoor men nu schrijven kan

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \end{vmatrix}$$

Ten slotte beschouwen wij het geval, dat a_2, b_2 en c_2 verschillend zijn, Wij denken ons de notatie zoodanig gekozen, dat $a_2 < b_2 < c_2$. Wij kunnen λ_a en λ_c dan zóódanig bepalen, dat

$\lambda_a a_2 + \lambda_c c_2 = b_2$, terwijl $\lambda_a + \lambda_c = 1$. Wij zullen in de eerste plaats veronderstellen, dat $\lambda_a a_1 + \lambda_c c_1 < b_1$. De driehoek, welks hoekpunten zijn de punten (a_1, a_2), (b_1, b_2) en $(\lambda_a a_1 + \lambda_c c_1, \lambda_a a_2 + \lambda_c c_2)$ heeft tot maat:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \lambda_a a_1 + \lambda_c c_1 & \lambda_a a_2 + \lambda_c c_2 & 1 \\ a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\lambda_c}{2}\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & 1 \\ a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \end{vmatrix}$$

De driehoek, welks hoekpunten zijn de punten $(\lambda_a a_1 + \lambda_c c_1, \lambda_a a_2 + \lambda_c c_2)$, (b_1, b_2) en (c_1, c_2) heeft tot maat:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \lambda_a a_1 + \lambda_c c_1 & \lambda_a a_2 + \lambda_c c_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\lambda_a}{2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}$$

Voor de punten, die de beide driehoeken gemeen hebben, is $x_2 = b_2$; deze punten vormen dus een verzameling van de maat 0.

De oorspronkelijk gegeven driehoek is de vereeniging der twee genoemde; zijn maat is dus de som van hunne maten, en dus:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}$$

Voor het geval, dat $\lambda_a a_1 + \lambda_c c_1 > b_1$, krijgt men als uitkomst dezelfde determinant, maar met de coëfficiënt $-\frac{1}{2}$.

f. De lezer bewijze, dat de verzameling der punten van een driehoek, die niet tot een der zijden behooren (de inwendige punten), dezelfde maat heeft als de geheele driehoek, zoodat de zijden een puntverzameling van de maat 0 vormen.

g. Beschouwen wij in een ruimte R_n $(n > 2)$ de verzameling der punten, die voldoen aan de volgende betrekkingen:

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_a a_1 + \lambda_b b_1 + \lambda_c c_1 \\ x_2 &= \lambda_a a_2 + \lambda_b b_2 + \lambda_c c_2 \\ a_k &\leqq x_k \leqq b_k. \qquad (2 < k \leqq n), \end{aligned}$$

waarin:

$$\lambda_a + \lambda_b + \lambda_c = 1,\ 0 \leqq \lambda_a \leqq 1,\ 0 \leqq \lambda_b \leqq 1,\ 0 \leqq \lambda_c \leqq 1.$$

De maat van deze puntverzameling bedraagt:

$$\pm \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} (b_3 - a_3) \ldots . (b_n - a_n).$$

Het bewijs van deze stelling is geheel analoog aan dat van de

formule van de maat van een driehoek. Eerst beschouwen wij weer het geval, dat $a_2 = b_2$.

In dit geval sluiten wij de beschouwde puntverzameling in tusschen twee intervalverzamelingen, die gedefiniëerd worden door dezelfde betrekkingen als in het tweedimensionale geval, aangevuld door de betrekkingen:

$$a_k \leqq x_k \leqq b_k \ (2 < k \leqq n).$$

Uit dit bijzondere geval leiden wij dan het algemeene geval af.

§ 65. In § 16 van Hoofdstuk I hebben wij de volgende definities gegeven:

Onder een *punt* verstaan wij een groep van n eindige, reëele getallen in een bepaalde volgorde geplaatst. De verzameling van alle punten, die men krijgt, door bij een gegeven waarde van n deze getallen alle mogelijke waarden te geven, heet een n-dimensionale ruimte.

Wij denken ons nu twee zulke n-dimensionale ruimten gegeven. De coördinaten van een punt P in de eene ruimte zullen wij aanduiden door $x_1, x_2, \ldots, x_n$, die van een punt $\overline{P}$ in de andere door $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$. Een betrekking, waardoor aan ieder punt P eener puntverzameling V een punt $\overline{P}$ eener puntverzameling V wordt toegevoegd noemen wij een *transformatie*; wij zullen zeggen, dat door zulk een transformatie de puntverzameling V in de puntverzameling $\overline{V}$ wordt omgezet.

In het bijzonder beschouwen wij het geval, dat de coördinaten x_k van het punt P geheele liniaire functies zijn van de coördinaten $\overline{x}_k$ van het correspondeerende punt $\overline{P}$. De transformatie heet dan *affien*. (Zie het leerboek der Anal. Meetkunde van Prof. Dr. J. A. Barrau, § 24).

§ 66. Wij zullen de volgende stelling bewijzen:

Stelling. *Bij een affiene transformatie wordt de maat van een willekeurige puntverzameling met het omgekeerde van de volstrekte waarde van de transformatiedeterminant vermenigvuldigd.*

Wij zullen deze stelling eerst bewijzen voor een aantal bijzondere gevallen, om hieruit dan het algemeene geval af te leiden.

a. In de eerste plaats beschouwen wij de transformatie:

$$x_k = \overline{x}_k + c_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Een interval, gedefiniëerd door de betrekkingen:

$$a_k \leqq x_k \leqq c_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

wordt getransformeerd in het interval:

$$a_k - c_k \leqq \bar{x}_k \leqq b_k - c_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \quad . \quad . \quad (3)$$

waarvan de maat gelijk is aan die van het oorspronkelijke interval. Een rij van netten van intervallen, waarvan elk net een onderverdeeling van alle voorafgaande is, wordt in een overeenkomstige rij getransformeerd. Indien een puntverzameling V door een rij van intervallen uit deze netten overdekt wordt, wordt de getransformeerde verzameling $\bar{V}$ overdekt door de getransformeerde intervallen. Is S de som van de inhouden van zulk een rij overdekkende intervallen, dan behoort dus bij elk getal S een daaraan gelijk getal $\bar{S}$.

Dezelfde opmerkingen gelden voor de inverse transformatie Bij ieder getal $\bar{S}$ behoort dus een daaraan gelijk getal S. De onderste grens der getallen S is dus gelijk aan die der getallen $\bar{S}$, m.a.w. de maat van $\bar{V}$ is *gelijk* aan die van V. Daar de transformatie-determinant hier $+1$ is, geldt in dit geval dus de boven uitgesproken stelling.

De hier beschouwde transformatie heet een *translatie.*

b. In de tweede plaats beschouwen wij de transformatie:

$$\bar{x}_1 = p x_1$$

$$x_k = \bar{x}_k. \quad (2 \leqq k \leqq n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Het interval, dat door de betrekkingen (2) gedefiniëerd wordt, wordt nu getransformeerd in het interval:

$$\frac{a_1}{p} \leqq \bar{x}_1 \leqq \frac{b_1}{p}$$

$$a_k \leqq \bar{x}_k \leqq b_k \quad (2 \leqq k \leqq n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5),$$

wanneer p positief is, en in het interval:

$$\frac{b_1}{p} \leqq \bar{x}_1 \leqq \frac{a_1}{p}$$

$$a_k \leqq \bar{x}_k \leqq b_k \quad (2 \leqq k \leqq n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

wanneer p negatief is. In ieder geval is de maat van het nieuwe interval $\left|\frac{1}{p}\right|$ maal de maat van het oorspronkelijke.

Een rij van netten van intervallen, waarvan elk net een onderverdeeling van alle voorafgaande is, wordt weer in een overeenkomstige rij getransformeerd. De som S van de inhouden van een rij intervallen, die een puntverzameling V overdekken, wordt

met $\left|\frac{1}{p}\right|$ vermenigvuldigd. Bij elk getal S behoort dus een getal $\bar{S}$, dat $\left|\frac{1}{p}\right|$ maal zoo groot is.

Voor de inverse transformatie gelden dezelfde opmerkingen; alleen moet men $\left|\frac{1}{p}\right|$ door $|p|$ vervangen. Bij elk getal $\bar{S}$ hoort dus een getal S, dat $|p|$ maal zoo groot is. Hieruit volgt gemakkelijk, dat de maat van $V\left|\frac{1}{p}\right|$ maal zoo groot is als de maat van $\bar{V}$. Daar de transformatie-determinant de waarde p heeft, geldt de stelling ook in dit geval.

c. In de derde plaats beschouwen wij de transformatie:

$$x_1 = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$$
$$x_k = \bar{x}_k \quad (2 \leqq k \leqq n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Het interval, dat door de betrekkingen (2) gedefiniëerd wordt, wordt nu getransformeerd in de puntverzameling:

$$a_1 \leqq \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \leqq b_1$$
$$a \leqq \bar{x}_k \leqq b_k \quad (2 \leqq k \leqq n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Teneinde deze puntverzameling nader te bestudeeren, beschouwen wij eerst de 2-dimensionale puntverzameling, die gedefiniëerd wordt door de betrekkingen:

$$a_1 \leqq \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \leqq b_1$$
$$a_2 \leqq \bar{x}_2 \leqq b_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Wij zullen bewijzen, dat deze puntverzameling (een „parallelogram”) de vereeniging is van 2 driehoeken, die geen inwendig punt gemeen hebben.

Voor de waarde $\bar{x}_2 = a_2$ zijn de uiterste waarden van $\bar{x}_1$, die aan de betrekkingen (9) voldoen, de waarden $a_1 - a_2$ en $b_1 - a_2$; voor $\bar{x}_2 = b_2$ de waarden $a_1 - b_2$ en $b_1 - b_2$.

De punten $(a_1 - a_2, a_2)$, $(b_1 - a_2, a_2)$ en $(b_1 - b_2, b_2)$ zijn de hoekpunten van een driehoek, die door de volgende betrekkingen gedefiniëerd wordt.

$$\left.\begin{array}{c} \bar{x}_1 = \lambda\,(a_1 - a_2) + \mu\,(b_1 - a_2) + \nu\,(b_1 - b_2) \\ \bar{x}_2 = \lambda\, a_2 + \mu\, a_2 + \nu\, b_2 \\ \lambda + \mu + \nu = 1, \quad 0 \leqq \lambda \leqq 1, \quad 0 \leqq \mu \leqq 1, \quad 0 \leqq \nu \leqq 1 \end{array}\right\} (10)$$

Dat elk punt van dezen driehoek aan de betrekkingen (9) voldoet, is gemakkelijk in te zien. Immers, uit de uitdrukking voor $\bar{x}_2$ volgt, dat $\bar{x}_2$ tusschen a_2 en b_2 in ligt (eventueel eraan gelijk is); en uit (10) volgt verder:

$$\overline{x}_1 + \overline{x}_2 = \lambda\, a_1 + \mu\, b_1 + \nu\, b_1, \qquad . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

waaruit volgt, dat $\overline{x}_1 + \overline{x}_2$ inligt tusschen a_1 en b_1 (eventueel eraan gelijk is.)

De punten $(a_1 - a_2, a_2)$, $(b_1 - b_2, b_2)$ en $(a_1 - b_2, b_2)$ zijn de hoekpunten van een driehoek, die door de volgende betrekkingen gedefiniëerd wordt:

$$\left.\begin{array}{r} \overline{x}_1 = \lambda' (a_1 - a_2) + \nu' (b_1 - b_2) + \varrho\, (a_1 - b_2) . \; . \\ \overline{x}_2 = \lambda' a_2 + \nu' b_2 + \varrho b_2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ \lambda' + \nu' + \varrho = 1, \; 0 \leqq \lambda' \leqq 1, \; 0 \leqq \nu' \leqq 1, \; 0 \leqq \varrho_2 \leqq 1 \end{array}\right\} (12)$$

Evenals zooeven ziet men weer, dat elk punt van dezen driehoek aan de betrekkingen (9) voldoet.

Om nu aan te toonen, dat de driehoeken (10) en (12) slechts punten op een der zijden gemeen hebben, en dat hun vereeniging de puntverzameling (9) is, denken wij ons in de betrekkingen (10) en (12) voor $\overline{x}_2$ een bepaalde, en wel dezelfde, waarde gesubstitueerd. Dit beteekent, dat $\lambda + \mu$, ν, λ' en $\nu' + \varrho$ bepaalde waarden krijgen, en wel:

$$\lambda + \mu = 1 - \nu = \lambda', \; \nu = 1 - \lambda' = \nu' + \varrho \quad . \; . \quad (13)$$

Uit (11) volgt nu, dat de uiterste waarden voor $\overline{x}_1 + \overline{x}_2$ zijn:
voor $\mu = 0$, $\lambda = 1 - \nu$: $\overline{x}_1 + \overline{x}_2 = (1 - \nu)\, a_1 + \nu b_1$
voor $\lambda = 0$, $\mu = 1 - \nu$: $\overline{x}_1 + \overline{x}_2 = b_1$.

Evenzoo volgt uit (12), dat de uiterste waarden van $\overline{x}_1 + \overline{x}_2$ zijn:
voor $\nu' = 0$, $\varrho = 1 - \lambda'$: $\overline{x}_1 + \overline{x}_2 = a_1$
voor $\varrho = 0$, $\nu' = 1 - \lambda'$:

$$\overline{x}_1 + \overline{x}_2 = \lambda' a_1 + (1 - \lambda')\, b_1 = (1 - \nu)\, a_1 + \nu b_1.$$

Voor elke waarde van b_2 is er dus slechts één punt, dat tot beide driehoeken behoort; dit moet dus op een der zijden van elken driehoek liggen. Neemt men de beide driehoeken samen, dan doorloopt $\overline{x}_1 + \overline{x}_2$ alle waarden, die volgens (9) mogelijk zijn, en de vereeniging der beide driehoeken is dus de puntverzameling (9).

Met behulp van § 64 vindt men, dat de maat van elk der beide driehoeken bedraagt $\frac{1}{2}(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$. Daar de verzameling hunner gemeenschappelijke punten de maat 0 heeft, is de maat hunner vereeniging de som hunner maten en dus $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$.

Vullen wij de betrekkingen (9), (10) en (12) aan door:

$$a_k \leqq \overline{x}_k \leqq b_k \; (3 \leqq k \leqq n) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

dan vinden wij op volkomen analoge wijze, dat de puntverzameling (8) de vereeniging is van 2 puntverzamelingen, zooals wij

die aan het slot van § 64 hebben beschouwd. Hieruit volgt voor de maat van (8) de waarde:

$$(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \ldots\ldots (b_n - a_n).$$

Een interval wordt dus door de transformatie (7) omgezet in een puntverzameling, waarvan de maat even groot is.

Zij nu V een willekeurige puntverzameling, $\overline{V}$ de getransformeerde puntverzameling. Wij denken ons V weer overdekt door een rij van intervallen uit een rij netten. Zij S de som van de maten dezer intervallen. Deze intervallen worden nu omgezet in puntverzamelingen, waarvan de som der maten eveneens S is; de maat van de vereeniging dezer verzamelingen is dus niet grooter dan S. En, daar deze vereeniging de puntverzameling $\overline{V}$ bevat, is $m\overline{V} \leqq S$. Daar dit voor elk getal S geldt, is $m\overline{V}$ niet grooter dan de onderste grens der getallen S, dus:

$$m\overline{V} \leqq mV \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Nu kan men voor de inverse transformatie van (7) op volkomen dezelfde wijze de eigenschappen bewijzen, die wij boven voor (7) bewezen hebben. Hieruit volgt:

$$mV \leqq m\overline{V} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Uit (15) en (16) volgt $mV = m\overline{V}$, zoodat de maat van elke puntverzameling onveranderd blijft. Dit is in overeenstemming met de algemeene stelling, daar de transformatiedeterminant de waarde $+1$ heeft.

d. Thans beschouwen wij de transformatie:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1\overline{x}_1 + a_2\overline{x}_2 + \ldots\ldots + a_n\overline{x}_n \\ x_k &= \overline{x}_k \ (2 \leqq k \leqq n) \quad \ldots\ldots \quad (17) \end{aligned}$$

Om deze transformatie te verkrijgen, passen wij eerst toe de transformatie:

$$x_k = a_k\overline{x}_k \ (k = 1, 2, \ldots\ldots n), \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

welke weer kan worden verkregen door n malen achter elkander een transformatie uit te voeren, analoog aan de boven onder b beschouwde. Bij elk van deze transformaties wordt de maat van een puntverzameling V met een der getallen $\left|\frac{1}{a_k}\right|$ vermenigvuldigd, dus bij de transformatie (18) met $\left|\frac{1}{a_1 a_2 \ldots\ldots a_n}\right|$.

Thans passen wij achtereenvolgens toe de transformaties:

$$\begin{aligned} x_1 &= \overline{x}_1 + \overline{x}_p \\ x_k &= \overline{x}_k \ (2 \leqq k \leqq n), \quad \ldots\ldots \quad (19) \end{aligned}$$

waarbij wij voor p achtereenvolgens elk der natuurlijke getallen van 2 tot en met n nemen. Bij elk van deze transformaties blijft de maat van V onveranderd.

Ten slotte passen wij toe de transformatie:

$$x_1 = \bar{x}_1$$

$$x_k = \frac{1}{a_k} \bar{x}_k \quad (2 \leqq k \leqq n) \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (20)$$

Hierdoor wordt de maat van V vermenigvuldigd met $|a_2 \ldots a_n|$. Al deze transformaties geven te zamen de transformatie (17) en wij zien, dat de maat van V met $\left|\frac{1}{a_1}\right|$ wordt vermenigvuldigd, in overeenstemming met de algemeene stelling.

e. Ten slotte beschouwen wij de algemeene, affiene transformatie, waarvan de determinant niet gelijk 0 is:

$$x_k = \sum_{l=1}^{l=n} a_k^l \bar{x}_l + \alpha_k \quad (k = 1, 2, \ldots . n) \quad . \quad . \quad . \qquad (21)$$

Deze transformatie verkrijgen wij door achtereenvolgens toe te passen een reeks transformaties, die wij als volgt verkrijgen:

In de eerste plaats trekken wij van de vergelijkingen (21) de eerste van de tweede af, na haar met een zoodanige factor te hebben vermenigvuldigd, dat in de tweede vergelijking de term met $\bar{x}_1$ verdwijnt. Vervolgens trekken wij de eerste en tweede vergelijking van de derde af, na hen met zoodanige factoren te hebben vermenigvuldigd, dat de termen met $\bar{x}_1$ en $\bar{x}_2$ verdwijnen, enz. In het algemeen trekken wij dus van de p-de vergelijking de eerste $(p - 1)$ (reeds gewijzigd) af na hen eerst met zoodanige factoren te hebben vermenigvuldigd, dat de termen met $\bar{x}_1, \ldots \bar{x}_{p-1}$ verdwijnen.

Het kan zijn, dat een der stappen, die tot uitvoering van dit voorschrift noodig zijn, niet uitvoerbaar is. Zoo is reeds de eerste stap niet uitvoerbaar, wanneer $a_1^1 = 0$, $a_2^1 \neq 0$. Met behulp van de theorie der determinanten kan men bewijzen, dat men in zoo'n geval steeds door een verandering van de rangschikking der vergelijkingen bereiken kan, dat de bedoelde stap wel uitvoerbaar wordt. Hernummert men hierbij de x_k, dan komt dit neer op een transformatie, waarbij de maat van een puntverzameling V zeker onveranderd blijft.

Na deze herleiding heeft men n vergelijkingen gekregen van de gedaante:

$$\sum_{m=1}^{m=n} b_k^m x_m = \sum_{l=1}^{l=n} c_k^l \bar{x}_l + \gamma_k \, (k = 1, 2, \ldots . n) \quad . \quad . \qquad (22)$$

Hierin is:

$$b_k^k = 1 \quad b_k^m = 0 \text{ voor } m > k$$
$$c_k^l = 0 \text{ voor } l < k.$$

Wij splitsen nu de transformatie (21) eerst in drie andere. De eerste wordt gedefiniëerd door de vergelijkingen:

$$\sum_{m=1}^{m=n} b_k^m x_m = \overline{x}_k \quad (k = 1, 2, \ldots n) \quad \ldots\ldots \quad (23)$$

De tweede wordt gedefiniëerd door:

$$x_k = \sum_{l=1}^{l=n} c_k^l \overline{x}_l \quad (k = 1, 2, \ldots. n) \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

De *derde* door:

$$x_k = \overline{x}_k + \gamma_k \quad (k = 1, 2, \ldots. n) \quad \ldots\ldots \quad (25)$$

De *eerste* kunnen wij verkrijgen door achtereenvolgens uit te voeren de transformaties, gedefiniëerd door:

$$\sum_{m=1}^{m=n} b_p^m x_m = \overline{x}_p$$
$$x_k = \overline{x}_k \quad (k \neq p), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

waarin wij voor p achtereenvolgens de natuurlijke getallen van n tot en met 1 nemen.

De *tweede* kunnen wij verkrijgen door achtereenvolgens uit te voeren de transformaties, gedefiniëerd door:

$$x_p = \sum_{l=1}^{l=n} c_p^l \overline{x}_l$$
$$x_k = \overline{x}_k \quad (k \neq p), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

waarin wij voor p achtereenvolgens de natuurlijke getallen van 1 tot en met n nemen.

De transformatie (21) is nu gesplitst in $2n + 1$ transformaties, waarvan de $2 - n$ eerste analoog zijn aan die, welke wij onder d beschouwd hebben, of aan de inverse daarvan. Voor elk van deze transformaties geldt de stelling, dat de maat van een puntverzameling V met het omgekeerde van de volstrekte waarde van de transformatie-determinant wordt vermenigvuldigd.

Een bekende stelling uit de leer der affiene transformaties zegt nu, dat, wanneer men eenige zulke transformaties na elkander uitvoert, de determinant der resulteerende transformatie het product is van de determinanten der afzonderlijke transformaties. De toepassing hiervan levert ons onmiddellijk het bewijs van onze stelling.

§ 67. De stelling, die in de vorige § bewezen is, ontleent haar belang hieraan, dat zij het mogelijk maakt, een gegeven puntverzameling te transformeeren in één, die „een eenvoudiger ligging ten opzichte van de coördinaatassen heeft", d.w.z. door eenvoudiger betrekkingen wordt gedefiniëerd. Kan men dan de maat van de getransformeerde puntverzameling bepalen, dan volgt hieruit de maat van de oorspronkelijke. We zullen dit door een paar voorbeelden toelichten.

a. De verzameling van alle punten eener ruimte R_n, welke voldoen aan de vergelijking:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b, \quad \dots \quad (1)$$

waarin de getallen $\frac{a}{k}$ en b gegeven zijn en niet alle getallen de waarde 0 hebben, heet een *lineaire, (n—1) dimensionale ruimte.* Wij zullen bewijzen, dat een zoodanige ruimte de maat 0 heeft. Hiertoe passen wij een affiene transformatie toe, waarvan de determinant niet gelijk 0 is, en waarvan een der definiëerende vergelijkingen is:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n - b = \overline{x}_1, \quad \dots \quad (2)$$

De punten der lineaire ruimte gaan hierdoor over in de punten, waarvoor $\overline{x}_1 = 0$. Volgens § 50 heeft de verzameling dezer punten de maat 0; hetzelfde geldt dus ook voor de oorspronkelijke verzameling.

b. Laat in een ruimte R_n een verzameling van $(n+1)$ punten gegeven zijn. De coördinaten van het p-de dezer punten stellen wij voor door $a_1^{(p)}, a_2^{(p)}, \dots a_n^{(p)}$. Wij zullen onderstellen, dat deze punten niet tot eenzelfde lineaire ruimte behooren. De punten, welke gedefiniëerd worden door de betrekkingen:

$$\left.\begin{aligned} x_k &= \sum_{p=1}^{p=n+1} \lambda_p a_k^{(p)} \quad (k = 1, 2, \dots n) \quad \dots \\ &\sum_{p=1}^{p=n+1} \lambda_p = 1 \quad \dots \dots \\ 0 &\leqq \lambda_p \leqq 1 \quad (p = 1, 2, \dots, n+1) \dots \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

vormen een *n-dimensionaal simplex.* De $(n+1)$ gegeven punten heeten de *hoekpunten* van het simplex. De punten, waarvoor één der parameters $\lambda_p = 0$ is, vormen een *zijruimte* van het simplex. Gemakkelijk bewijst men de volgende stellingen, hetgeen wij aan den lezer zullen overlaten:

1°. Elke zijruimte van een simplex is een deel van een lineaire, $(n-1)$ dimensionale ruimte.

2⁰. Elke zijruimte bevat n hoekpunten van het simplex. Het overblijvende hoekpunt zullen wij het overstaande hoekpunt der genoemde zijruimte noemen.

3⁰. Een simplex is een afgesloten puntverzameling.

4⁰. De punten van een simplex, waarvoor geen der parameters $\lambda_p = 0$ is, heeten inwendige punten. Zij vormen een open puntverzameling.

5⁰. De zijruimten van het simplex vormen tezamen een afgesloten puntverzameling, welke de maat 0 heeft.

6⁰. Door een affiene transformatie gaat een simplex weer in een simplex over.

Ten einde de maat van een simplex te kunnen berekenen, bewijzen wij eerst de volgende

Stelling. *Een n-dimensionaal interval kan men verkrijgen als vereeniging van n! simplexen, die geen inwendig punt gemeen hebben en dezelfde maat hebben.*

Wij bewijzen dit eerst voor het interval I, dat gedefiniëerd wordt door de betrekkingen:

$$0 \leqq x_k \leqq 1 \quad (k = 1, 2, \ldots . n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Zij P een inwendig punt van dit interval I; wij zullen eerst onderstellen, dat geen 2 der coördinaten van P aan elkander gelijk zijn. Zij x_{k_1} de kleinste coördinaat van P, x_{k_2} de daarop volgende, enz. Wij stellen nu:

$$x_{k_1} = \lambda_1$$
$$x_{k_2} = \lambda_1 + \lambda_2$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$x_{k_r} = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots . + \lambda_r \quad (r = 1, 2, \ldots . , n) \quad . \quad . \quad (5)$$

Vergelijkt men deze formules met de formules (3), dan ziet men, dat het punt P behoort tot een simplex, waarvan de hoekpunten als volgt bepaald zijn:

Van het eerste hoekpunt zijn alle coördinaten $= 1$. Van het tweede hoekpunt is de coördinaat $a^{(2)}_{k_1} = 0$, de andere zijn gelijk 1. Van het derde hoekpunt zijn de coördinaten $a^{(3)}_{k_1} = 0$, en $a^{(3)}_{k_2} = 0$, de andere zijn $= 1$, enz. Van het $(n + 1)^e$ hoekpunt ten slotte zijn alle coördinaten $= 0$.

Daar men de n getallen k_r op $n!$ manieren kan permuteeren, zijn er $n!$ zulke simplexen, en elk punt van het interval I, waarvan geen twee coördinaten aan elkander gelijk zijn, behoort tot één en niet meer dan één dezer simplexen.

Zijn twee coördinaten van een punt P aan elkander gelijk, dan kan men bij de rangschikking der coördinaten naar de grootte

één dezer beide naar verkiezing vóór laten gaan; het punt P behoort dan dus tot 2 simplexen. Daar echter in beide gevallen één der parameters $\lambda_r = 0$ wordt, behoort P tot een zijruimte van elk dezer simplexen. Een analoge uitkomst geldt, wanneer meerdere coördinaten van P aan elkander gelijk zijn.

Behoort P tot de begrenzing van I, dan is òf de kleinste coördinaat van $P = 0$, òf de grootste $= 1$. Hieruit volgt, dat òf $\lambda_1 = 0$, òf $\lambda_{n+1} = 0$. Het punt P ligt dus ook dan in een zijruimte van elk der simplexen, waartoe het behoort.

Verder kunnen wij opmerken, dat door de transformatie:

$$x_{k_r} = \bar{x}_r \ldots\ldots (r = 1, 2, \ldots\ldots n) \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

een willekeurig simplex van deze alle in het eerste kan worden omgezet. Daar de determinant dezer transformatie $= \pm 1$ is, hebben alle simplexen dus dezelfde maat.

Is nu een willekeurig interval gegeven door de betrekkingen:

$$a_k \leqq x_k \leqq b_k \ (k = 1, 2, \ldots. n), \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

dan kunnen we dit in het boven beschouwde interval I omzetten door de transformatie:

$$x_k = a_k + (b_k - a_k)\, \bar{x}_k. \ (k = 1, 2, \ldots. n) \ldots \quad (8)$$

Door de inverse transformatie worden de $n!$ simplexen, waarin het interval I verdeeld is, omgezet in even zoovele simplexen, welker vereeniging het gegeven interval is.

Wij kunnen thans de volgende stelling bewijzen:

Stelling. *De maat van een n-dimensionaal simplex is* $\frac{1}{n!}$ *maal de volstrekte waarde van de determinant, welks elementen de coördinaten der hoekpunten zijn,* (*waarbij de coördinaten van eenzelfde hoekpunt de elementen van eenzelfde rij vormen*), *behalve de elementen der* $(n+1)^{ste}$ *kolom, die alle de waarde één hebben.*

Deze stelling is juist voor het simplex S, welks hoekpunten als volgt bepaald zijn:

Van het eerste hoekpunt zijn alle coördinaten 0. Van het tweede hoekpunt zijn alle coördinaten 0, behalve het eerste, dat gelijk 1 is; van het derde hoekpunt zijn alle coördinaten 0, behalve de beide eerste, die gelijk 1 zijn, enz. Van het $(n+1)^{ste}$ hoekpunt ten slotte zijn alle coördinaten gelijk 1.

Volgens het bovenstaande toch is de maat van dit simplex S $\frac{1}{n!} \times$ de maat van een n-dimensionale kubus, die de maat één heeft. Vormt men verder in dit geval de genoemde determinant,

dan overtuigt men zich gemakkelijk, dat hij de volstrekte waarde één heeft.

Een willekeurig simplex kan nu door een affiene transformatie in dit bijzondere simplex S worden omgezet. Om deze transformatie te bepalen, kieze men de coëfficiënten zóó, dat het k^{de} hoekpunt van het gegeven simplex met het k^{de} hoekpunt van S overeenstemt, waarbij men k achtereenvolgens de waarden 1, 2, ... n geeft. De lezer overtuige zich, dat de coëfficiënten hierdoor volkomen bepaald worden.

De lezer bewijze nu, dat, wanneer men voor het gegeven simplex de bovengenoemde determinant opschrijft, en hierin voor de coördinaten de uitdrukkingen substitueert, waaraan zij, krachtens de transformatieformules, gelijk zijn, de determinant gelijk blijkt te zijn aan het product van de overeenkomstige determinant van het simplex S en van de determinant der transformatie. Verder wordt de maat van het simplex bij deze transformatie met het omgekeerde van de volstrekte waarde van de transformatiedeterminant vermenigvuldigd. Hieruit volgt, dat, wanneer de genoemde stelling vóór de transformatie geldt, zij ook nà de transformatie geldt, en omgekeerd. Daar zij nu geldt voor het simplex S, geldt zij voor een willekeurig simplex.

§ **68**. Wij zullen onze studie van de meetbare puntverzamelingen besluiten met het bewijs van enkele stellingen, die ons later van nut zullen zijn.

Stelling. *Een niet begrensde, meetbare puntverzameling kan men verkrijgen als limiet van een aftelbare rij, begrensde, meetbare puntverzamelingen, welker maten de maat van de gegeven puntverzameling tot limiet hebben.*

Zij m een natuurlijk getal. Wij beschouwen het interval, dat gedefiniëerd wordt door de betrekkingen:

$$-m \leqq x_k \leqq +m \quad (k=1,2,\ldots. n) \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

De doorsnede V_m van dit interval met de gegeven puntverzameling V is een begrensde, meetbare puntverzameling. Laat men m de rij der natuurlijke getallen doorloopen, dan verkrijgt men een aftelbare rij van puntverzamelingen V_m, waarvan ieder een deel van alle volgende is, en die dus convergeert. Daar ieder punt van V vanaf een zekere waarde van m binnen het interval (1) ligt, is $V = \lim V_m$. Volgens § 60 is de maat van V de limiet van de maat van V_m.

Stelling. *De maat van een puntverzameling V is de onderste grens van de maten van alle open puntverzamelingen, waarvan V een deel is.*

Is U een zoodanige puntverzameling, dan is volgens § 48 de maat van U niet kleiner dan die van V. Hiermede is de stelling bewezen voor het geval, dat de maat van $V = +\infty$ is. Is de maat van V eindig, dan moet nog bewezen worden, dat, wanneer ε een willekeurig, positief getal is, men steeds een puntverzameling U kan vinden, waarvoor de maat voldoet aan de betrekking:

$$m\,U \leqq m V + \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Uit de definitie van de maat volgt nu, dat men een aftelbare rij van gesloten intervallen I_1, I_2, ... vinden kan, die V overdekken en waarvan de som der maten niet grooter is dan $m V + \frac{\varepsilon}{2}$. Laten verder de positieve getallen ε_1, ε_2, ... de termen zijn van een oneindig voortloopende reeks, waarvan de som niet grooter dan $\frac{\varepsilon}{2}$ is.

Bij elk der intervallen I_p bepalen wij nu een *open* interval I'_p, dat I_p bevat, en waarvan de maat voldoet aan de betrekking:

$$m\,I'_p \leqq m\,I_p + \varepsilon_p.$$

De vereeniging van alle intervallen I'_p is een open puntverzameling U, die V bevat, en waarvan de maat niet grooter is dan de som van de maten der intervallen I'_p, dus niet grooter dan $m\,V + \varepsilon$. Hiermede is de stelling bewezen.

Is de puntverzameling V *meetbaar*, dan is de maat van U de som van de maten van V en van $U - V$. Is verder mV eindig, dan kan men de zooeven bewezen stelling ook zóó formuleeren, dat men een open puntverzameling U kan vinden, die V bevat en zóódanig is, dat $m\,(U - V) < \varepsilon$.

Het is merkwaardig, dat deze stelling ook geldt, wanneer V weliswaar meetbaar is, doch een oneindig groote maat heeft. Wij bewijzen dit als volgt:

Zij P een natuurlijk getal. Zij I_p het interval, dat gedefiniëerd wordt door de betrekkingen:

$$-p \leqq x_k \leqq +p \quad (k = 1, 2, .. n.)$$

Zij V_p de verzameling der punten van V, die wel tot het interval I_p, doch niet tot het interval I_{p-1} behooren. Zij verder ε willekeurig gekozen, en laten de positieve getallen ε_1, ε_2, ... de termen zijn van een oneindig voortloopende reeks, waarvan de som niet grooter dan ε is.

Bij elke puntverzameling V_p kan men nu een open puntverzameling U_p vinden, die V_p bevat en zóódanig is, dat $m\,(U_p - V_p)$ kleiner is dan ε_p. Zij U de vereeniging van de aftelbaar vele,

aldus geconstrueerde puntverzamelingen U_p. De puntverzameling $U - V$ is nu een deel van de vereeniging van de puntverzamelingen $U_p - V_p$. De maat van $U - V$ is dus niet grooter dan de som van de maten der puntverzamelingen $U_p - V_p$, dus niet grooter dan ε, wat te bewijzen was.

Uit de zooeven bewezen stelling volgt nu de volgende:

Stelling. *Elke meetbare puntverzameling is het verschil van een inwendige grensverzameling en van een puntverzameling van de maat 0.*

Zij V de gegeven puntverzameling. Zij $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots.$ een rij positieve getallen, waarvan de limiet 0 is.

Bij elk der getallen ε_p kan men nu een open puntverzameling U_p vinden, die V bevat en zóódanig is, dat $m(U_p - V) < \varepsilon_p$. (Natuurlijk is dit op oneindig vele wijzen mogelijk; wij denken ons echter voor elk getal ε_p een bepaalde puntverzameling U_p gekozen, die aan de genoemde voorwaarde voldoet).

Men verkrijgt op deze wijze een aftelbare rij van open puntverzamelingen U_p. De doorsnede D van deze puntverzamelingen U_p is een inwendige grensverzameling. Daar elk der puntverzamelingen U_p de puntverzameling V bevat, geldt hetzelfde voor D. Verder is $D - V$ de doorsnede van de puntverzamelingen $U_p - V$; de maat van $D - V$ is dus kleiner dan elk der getallen ε_p, en dus gelijk 0. Daar nu:

$$V = D - (D - V),$$

is hiermede de stelling bewezen.

Zij V' de complementairverzameling van V. Is V meetbaar, dan is V' dit ook, en kan men dus een inwendige grensverzameling D_1 vinden, die V' bevat, en zóódanig is, dat $D_1 - V'$ de maat 0 heeft. Zij D'_1 de complementairverzameling van D_1. Daar D_1 V' bevat, zal D'_1 een deel van V zijn; en daar D_1 een inwendige grensverzameling is, is D'_1 een uitwendige grensverzameling. Verder is $V - D'_1$ hetzelfde als $D_1 - V'$; immers, deze verzameling bestaat uit de punten van V, die niet tot D'_1, dus wel tot D_1 behooren. De verzameling $V - D'_1$ heeft dus de maat 0. Uit de betrekking:

$$V = D'_1 + (V - D'_1)$$

volgt nu de stelling:

Stelling. *Een meetbare puntverzameling kan men steeds verkrijgen als som van een uitwendige grensverzameling en een puntverzameling van de maat nul.*

§ 69. In de voorafgaande § hebben wij de eigenschappen der *meetbare* puntverzamelingen bestudeerd. De vraag rijst, of

er puntverzamelingen bestaan, die niet meetbaar zijn. Wij zullen deze vraag beantwoorden door de constructie van een één-dimensionale, niet-meetbare puntverzameling, die een deel is van het interval $0 \leqq x \leqq 1$.

Om tot deze constructie te geraken, beginnen wij met een zeker onmeetbaar getal α te kiezen, dat tusschen 0 en 1 ligt. Is nu x een *willekeurig* getal tusschen 0 en 1, dan verstaan wij onder $A(x)$ de verzamelling van alle getallen x' tusschen 0 en 1, die men kan schrijven in de gedaante:

$$x' = x + p\alpha + q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

waarin p en q geheele getallen zijn (positief, negatief of nul). Zulk een verzameling $A(x)$ bezit de volgende eigenschappen:

1°. Bij elk getal x' van $A(x)$ behooren een bepaalde waarde van p en een bepaalde waarde ven q. Immers, golden voor een getal x' te gelijk de formule (1) en de formule:

$$x' = x + p'\alpha + q' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

dan zou hieruit volgen:

$$0 = (p - p')\,\alpha + (q - q') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

en wegens de onmeetbaarheid van α is dit onmogelijk, wanneer niet $p = p'$ en $q = q'$ is.

2°. Is het getal p, dat bij een punt van een gegeven verzameling $A(x)$ behoort, gegeven, dan is ook het getal q volkomen bepaald. Immers, geeft men in de formule (1) het getal p een bepaalde waarde, en laat men q de rij der geheele getallen doorloopen, dan krijgt men een oneindig aantal getallen x_1, zóódanig, dat het verschil van twee opeenvolgende dezer getallen telkens $= 1$ is. Van deze getallen ligt er juist één in het interval $0 \leqq x \leqq 1$, en behoort er dus één tot de gegeven verzameling $A(x)$.

Uit deze eigenschap volgt, dat men de punten van een verzameling $A(x)$ op de volgende wijze kan krijgen:

Men geeft eerst p achtereenvolgens de waarden 0, 1, 2, enz. en bepaalt bij elk van deze waarden de bijbehoorende waarde van q. Men ziet gemakkelijk, dat, wanneer men aan p twee opeenvolgende waarden geeft, het getal q òf constant blijft, òf met 1 afneemt. Vervolgens geeft men het getal p de waarden -1, -2, -3 enz.

3°. Twee verzamelingen $A(x)$ en $A(y)$ hebben òf geen enkel punt gemeen, òf zij vallen samen.

Zij n.l. y een punt van een verzameling $A(x)$, dan zijn er 2 geheele getallen p_1 en q_1, zóódanig, dat:

$$y = x + p_1\alpha + q_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Een willekeurig getal x' van $A(x)$ wordt gegeven door de formule (1).

Uit de formules (1) en (4) volgt nu:

$$x' = y + (p - p_1)\alpha + (q - q_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5),$$

zoodat x' tot $A(y)$ behoort. De verzamelingen $A(x)$ en $A(y)$ vallen dus samen, wanneer y tot $A(x)$ behoort.

Er zijn natuurlijk oneindig vele verzamelingen $A(x)$ en het aantal dezer verzamelingen is zelfs niet aftelbaar oneindig. Immers, volgens het bovenstaande, bevat elke verzameling $A(x)$ *aftelbaar* vele punten; was hun aantal nu aftelbaar oneindig, dan zouden zij te zamen nog slechts aftelbaar vele punten bevatten, terwijl *elk* punt van het interval $0 \leqq x \leqq 1$ tot een verzameling $A(x)$ behoort.

Wij denken ons nu uit *elke* verzameling $A(x)$ een bepaald getal uitgekozen. Zij V de verzameling dezer uitgekozen getallen. Wij zullen nu bewijzen, dat de verzameling V *niet meetbaar* is.

Zij V_1 de doorsnede van V met het interval $0 \leqq x \leqq 1 - \alpha$, en zij $V_2 = V - V_1$. Daar het interval $0 \leqq x \leqq 1 - \alpha$ een meetbare puntverzameling is, heeft men:

$$mV = mV_1 + mV_2.$$

Wij beschouwen nu de transformatie:

$$\bar{x} = x + \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Door deze transformatie worden de puntverzamelingen V_1 en V_2 omgezet in 2 puntverzamelingen V'_1 en V'_2. Uit de vroeger bewezen stelling over lineaire transformaties volgt, dat $mV'_1 = mV_1$ en $mV'_2 = mV_2$.

Het interval $0 \leqq x \leqq 1 - \alpha$, waartoe V_1 behoort, wordt door deze transformatie omgezet in het interval $\alpha \leqq x \leqq 1$; hiertoe behoort dus V'_1. Het interval $1 - \alpha < x \leqq 1$, waartoe V_2 behoort, wordt omgezet in het interval $1 < x \leqq 1 + \alpha$; hiertoe behoort dus V'_2.

Op de verzameling V'_2 passen wij nu toe de transformatie:

$$\bar{x} = x - 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Hierdoor gaat V'_2 over in een verzameling V''_2, die dezelfde maat als V'_2 heeft.

De beide puntverzamelingen V'_1 en V''_2 vormen een verzameling V', die tot het interval $0 \leqq x \leqq 1$ behoort, en dezelfde maat als V heeft.

Op de verzameling V' kan men nu dezelfde bewerking toepassen, als waardoor V' uit V ontstaan is; men verkrijgt dan

een verzameling V'', die weer dezelfde maat heeft. Gaat men zoo door, dan verkrijgt men een aftelbaar aantal verzamelingen $V^{(k)}$, die alle tot het interval $0 \leqq x \leqq 1$ behooren, en dezelfde maat hebben.

Is P nu een punt van V, P' het overeenkomstige punt van V', dan volgt uit het bovenstaande, dat het verschil der coördinaten van P en P' òf α òf $\alpha - 1$ bedraagt. Het punt P' behoort dus tot dezelfde verzameling $A(x)$ als P, maar de bijbehoorende waarde van p is 1 meer. Hieruit volgt, dat de verzamelingen V en V' geen enkel punt gemeen hebben, en in het algemeen geen twee der verzamelingen $V^{(k)}$.

Men kan nu ook de transformatie beschouwen, welke hierin bestaat, dat men aan elk punt P het punt toevoegt, dat met P tot eenzelfde verzameling $A(x)$ behoort, doch bij een waarde van p behoort, die één minder is. Door deze transformatie wordt V omgezet in een verzameling $V^{(-1)}$. Daar deze transformatie de inverse is van de zoo even gedefiniëerde, blijft ook bij de toepassing hiervan de maat onveranderd. Door herhaalde toepassing van deze transformatie verkrijgt men weer een rij puntverzamelingen $V^{(k)}$, waarbij de index k nu negatieve waarde heeft. Het is weer duidelijk, dat geen 2 dezer verzamelingen een punt gemeen hebben.

Zij P een punt van een zekere verzameling $A(x)$. Het is duidelijk, dat men, door van P uit te gaan, en de beide, zooeven beschouwde, reeksen van transformaties toe te passen, *alle* punten der verzameling $A(x)$ krijgt. En daar de verzameling V met *elke* verzameling $A(x)$ een punt gemeen heeft, volgt hieruit, dat ieder punt van het interval $0 \leqq x \leqq 1$ tot een bepaalde verzameling $V^{(k)}$ behoort.

Wij kunnen nu aantoonen, dat de onderstelling, dat V meetbaar zou zijn, tot een tegenstrijdigheid voert. Voor de som van aftelbaar vele, meetbare puntverzamelingen geldt n.l. de stelling, dat de maat van deze som gelijk is aan de som van de maten der afzonderlijke verzamelingen. Was dus V meetbaar, en $mV = 0$, dan was ook de maat van de som van alle verzamelingen $V^{(k)} = 0$; maar deze som is het interval $0 \leqq x \leqq 1$, en heeft dus de maat 1. En evenmin kan de maat van V, indien V meetbaar is, grooter dan één zijn, daar dan de maat van de genoemde som $+\infty$ zou zijn. Hiermede is bewezen, dat V *niet meetbaar is.*

Opmerking. De zooeven beschouwde puntverzameling V is verkregen door uit *elke* verzameling $A(x)$ een bepaald element uit te kiezen. Daar er oneindig vele verzamelingen $A(x)$ zijn, kan men hen niet één voor één beschouwen, en uit elk van hen

een willekeurig element uitkiezen; men moet zich voorstellen, dat een of andere *regel* gekozen wordt, waardoor uit elke verzameling $A(x)$ een bepaald element wordt aangewezen.

Het is tot nu toe echter niet gelukt, een dergelijke regel te formuleeren, en daarmede dus een bepaalde puntverzameling V te definiëeren. De vraag, welke waarde men bij dezen stand van zaken aan de bovenstaande ontwikkelingen moet toekennen, is moeilijk te beantwoorden.

Door E. ZERMELO is het volgende beginsel uitgesproken: indien een oneindig aantal verzamelingen gegeven is, moet het steeds als mogelijk beschouwd worden, een regel te vinden, waardoor uit elk dezer verzamelingen een bepaald element uitgekozen wordt. Dit beginsel heeft tot vele discussies aanleiding gegeven, en het laatste woord is er zeker nog niet over gesproken.

Wij zullen hierop niet nader ingaan, maar moeten er den lezer op wijzen, dat wij in § 68 dit beginsel eveneens hebben toegepast, zij het voor het eenvoudige geval, dat het aantal verzamelingen (van puntverzamelingen U_p), uit elk waarvan een bepaald element (een bepaalde puntverzameling U_p), uitgekozen werd, *aftelbaar oneindig* was.

§ **70.** In dit hoofdstuk hebben wij van de maat van een puntverzameling een definitie gegeven, die, wat het wezen der zaak betreft, afkomstig is van E. BOREL. Wij zullen een enkel woord wijden aan een definitie, die door C. JORDAN reeds eerder opgesteld was, en die betrekking heeft op *begrensde* puntverzamelingen.

Zij V een puntverzameling, die een deel is van een gesloten interval I. Wij beschouwen een rij van netten N_k, waarvan ieder een deel van alle voorafgaande is, die aan de gewone onderstellingen voldoen, en waarvan het eerste net uit het enkele interval I bestaat.

Zij S_k de som van de inhouden der intervallen van het net N_k, die met de puntverzameling V een punt gemeen hebben. Bij toename van k kan het getal S_k niet toenemen; immers, elk interval uit het net N_{k+1}, dat met V een punt gemeen heeft, is een deel van een interval uit het net N_k, dat dezelfde eigenschap bezit. De limiet, waartoe S_k nadert bij toename van k wordt door JORDAN de *uitwendige maat* van de puntverzameling V genoemd.

Vergelijkt men deze definitie met die van § 46, dan ziet men, dat het verschil hierin gelegen is, dat men bij de definitie van JORDAN alleen overdekkende intervalverzamelingen beschouwt, waarvan alle intervallen tot *eenzelfde* net N_k behooren. De

intervallen van het net N_k, die met V een punt gemeen hebben, vormen een afgesloten puntverzameling A_k. Zij A de doorsnede van alle puntverzamelingen A_k. Volgens § 33 is A weer een afgesloten puntverzameling. Daar elke puntverzameling A_k de puntverzameling V bevat, is V een deel van A.

Wij zullen de maat van een puntverzameling volgens de definitie van Borel de *B-maat*, de uitwendige maat volgens de definitie van Jordan de *J-maat* noemen.

De *B-maat* van een puntverzameling A_k is gelijk aan de som van de inhouden der samenstellende intervallen van A_k, dus gelijk aan het bijbehoorende getal S_k. De *B-maat* van A is volgens § 60 de limiet van deze getallen S_k, en dus gelijk aan de *J-maat* van V.

Wij hebben reeds opgemerkt, dat V een deel van A is. Zij P nu een punt, dat niet tot V behoort, doch wel een verdichtingspunt van V is. Beschouwen wij een der puntverzamelingen A_k. Daar V een deel hiervan is, is P ook een verdichtingspunt van deze puntverzameling A_k, en daar A_k afgesloten is, behoort P tot A_k. Dit geldt voor elke waarde van k; P behoort dus tot alle puntverzamelingen A_k, dus ook tot A.

Zij omgekeerd Q een punt, dat noch tot V behoort, noch een verdichtingspunt van V is. Men kan dan een index k vinden zoodanig, dat elk interval van het net N_k, dat Q bevat, met V geen enkel punt gemeen heeft, en dus niet tot A_k behoort. Voor deze waarde van k behoort Q dus niet tot A_k, en dus behoort Q niet tot A.

De verzameling A is dus de vereeniging van V met de verzameling der verdichtingspunten van V, en de J-maat van V is gelijk aan de B-maat van deze vereeniging.

Uit deze stelling volgt dat de *J-maat* van een puntverzameling V onafhankelijk is van de rij van netten, met behulp waarvan zij gedefiniëerd is, en dat zij bij een affiene transformatie met het omgekeerde van de transformatiedeterminant wordt vermenigvuldigd.

Verder ziet men, dat voor begrensde, *afgesloten* puntverzameling V de *J-maat* gelijk is aan de *B-maat*.

Naast de boven gedefiniëerde uitwendige maat, wordt door Jordan ook de *inwendige* maat gedefiniëerd. Wij beschouwen weer een begrensde puntverzameling V, en een rij van netten N_k. Zij B_k de vereeniging van de intervallen van het net N_k, die *een deel zijn van* V. De som S'_k van de inhouden dezer intervallen kan bij toename van k niet afnemen; immers, wanneer een interval van een net N_k een deel is van V, geldt hetzelfde voor *alle* intervallen van het net N_{k+1}, welke tot dat interval behooren.

De limiet der getallen S'_k heet de inwendige maat van V. Zij is niet grooter dan de uitwendige maat, daar elke intervalverzameling B_k een deel is van de boven beschouwde intervalverzameling A_k.

Elk *inwendig* punt van de verzameling V zal vanaf een zekere waarde van k tot een der intervallen van de verzamelingen B_k behooren. De vereeniging B van alle verzamelingen B_k bevat dus alle inwendige punten van V. De punten van een verzameling B_k, die *geen* inwendige punten van V zijn, moeten tot de begrenzing van een der intervallen van B_k behooren. De punten van B, die *geen* inwendige punten van V zijn, moeten dus behooren tot de begrenzing van een van aftelbaar vele intervallen; zij vormen dus een puntverzameling, waarvan de *B-maat* gelijk is aan 0.

De *B-maat* van de puntverzameling B is de limiet van de maten der verzamelingen B_k, dus gelijk aan de inwendige maat van V. Verder onderscheidt zich de puntverzameling B van de verzameling der inwendige punten van V alleen door een puntverzameling, waarvan de *B-maat* gelijk is aan 0. Hieruit volgt:

Stelling. *De inwendige maat van een puntverzameling V is gelijk aan de B-maat van de verzameling der inwendige punten van V.*

Hieruit volgt, dat ook de inwendige maat van V van de gebruikte rij van netten onafhankelijk is, en bij een affiene transformatie op de gewone wijze getransformeerd wordt. Voor een *open* puntverzameling is de inwendige maat gelijk aan de *B-maat*.

Zijn de uitwendige en de inwendige maat van een begrensde puntverzameling aan elkander gelijk, dan heet deze puntverzameling *meetbaar volgens* JORDAN. Hiertoe is noodzakelijk en voldoende, dat de boven gedefiniëerde puntverzamelingen A en B dezelfde *B-maat* hebben en hun verschil dus de *B-maat* 0 bezit. Dit verschil $A - B$ bestaat uit de punten, die geen inwendige punten van V zijn, doch wel punten van V of verdichtingspunten van V. Men kan dit ook zoo formuleeren, dat $A - B$ bestaat uit de beide volgende soorten van punten:

1⁰. De punten van V, die verdichtingspunten zijn de complementairverzameling V'.

2⁰. De punten van V', die verdichtingspunten zijn van V. Deze verzameling $A - B$ heet de *begrenzing* van V. De lezer bewijze, dat deze begrenzing een *afgesloten* puntverzameling is. De voorwaarde, dat de *B-maat* van deze begrenzing gelijk is aan 0, kan dus vervangen worden door de voorwaarde, dat de *J-maat* van de begrenzing gelijk is aan nul.

De lezer bewijze de volgende stelling.

Stelling. *Is* V *een puntverzameling, die meetbaar is volgens* JORDAN, U *een willekeurige, begrensde puntverzameling, dan heeft men:*

$$mU = mUV + m(U - UV),$$

waarin het teeken m zoowel de uitwendige als de inwendige maat kan aanduiden, (met dien verstande, dat de beteekenis van m in de drie termen van bovenstaande formule dezelfde is).

De eigenschappen van een puntverzameling, die meetbaar is volgens JORDAN, zijn dus analoog aan die van een puntverzameling, welke meetbaar is volgens BOREL. Dit blijkt ook uit de volgende stelling; waarvan wij het bewijs eveneens aan den lezer overlaten.

Stelling. *De vereeniging en de doorsnede van een eindig aantal puntverzamelingen, welke meetbaar zijn volgens* JORDAN, *zijn weer meetbaar volgens* JORDAN.

In tegenstelling met de meetbaarheid volgens BOREL, blijft deze stelling niet doorgaan, wanneer men het woord „eindig" door „aftelbaar oneindig" vervangt. Zoo is één enkel punt een volgens JORDAN meetbare puntverzameling; de verzameling van alle meetbare getallen tusschen 0 en 1 is daarentegen een één-dimensionale puntverzameling, die volgens JORDAN niet meetbaar is.

HOOFDSTUK IV.

Functies.

§ **71.** In Hoofdstuk I, § 24, hebben wij reeds de volgende definitie gegeven:

Is volgens een zekere wet aan ieder punt van een puntverzameling A eener n-dimensionale ruimte een reëel, eindig of oneindig getal toegevoegd, dan zegt men, dat op A een **functie** gedefiniëerd is. Het getal, dat aan een punt P van A met de coördinaten $x_1, x_2, \ldots. x_n$ is toegevoegd, heet de **waarde** van de functie in het punt P. Het wordt aangeduid door een der welbekende symbolen $f(x_1, x_2, \ldots. x_n)$, $F(x_1, x_2, \ldots. x_n)$ enz. In plaats van „de functie welker waarde in het punt P door het symbool $f(x_1, x_2, \ldots. x_n)$ wordt voorgesteld" zegt men kortweg: „de functie $f(x_1, x_2, \ldots. x_n)$".

§ **72.** Wij zullen in dit hoofdstuk verband leggen tusschen de theorie der functies en die der puntverzamelingen. Hiertoe diene eerst het volgende:

Laten gegeven zijn een n-dimensionale ruimte R_n, en een $(n+1)$-dimensionale ruimte R_{n+1}. Een willekeurig punt P der ruimte R_n voegen wij nu toe aan het punt P' der ruimte R_{n+1}, waarvan de eerste n coördinaten met de n coördinaten van P overeenstemmen, terwijl de $(n+1)^e$ coördinaat van P' de waarde nul heeft. Op deze wijze wordt de geheele ruimte R_n afgebeeld op de verzameling der punten van R_{n+1}, waarvoor $x_{n+1} = 0$.

De aldus aan elkaar toegevoegde punten P en P' zullen wij nu met elkander *identificeeren*, en de ruimte R_n dus identificeeren met de verzameling der punten van R_{n+1}, waarvoor $x_{n+1} = 0$. Elke puntverzameling van R_n wordt hierdoor tevens een puntverzameling van R_{n+1}.

Hierbij moet echter een opmerking worden gemaakt. Een puntverzameling V van R_n bezit volgens het vorige hoofdstuk een zekere maat, welke met behulp van een rij van netten van n-dimensionale intervallen wordt gedefiniëerd. Beschouwt men V als deelverzameling van R_{n+1}, en bepaalt men dus haar maat met behulp van een rij van netten van $(n+1)$-dimensionale

intervallen, dan vindt men de waarde nul, daar immers de geheele verzameling der punten van R_{n+1}, waarvoor $x_{n+1} = 0$, de maat 0 heeft.

De beide maten, die men dus aan de puntverzameling V kan toekennen, zullen wij respectievelijk de *n-maat* en de *(n + 1)-maat* noemen; is uit den samenhang duidelijk, welke van beide bedoeld wordt, dan spreken wij kortweg van de „maat".

Een puntverzameling V van R_n kan als zoodanig meetbaar of niet meetbaar zijn; beschouwen wij haar als deelverzameling eener R_{n+1}, dan is zij steeds meetbaar, daar een puntverzameling van de maat 0 steeds meetbaar is.

Een definitie, die ons in het vervolg vaak van nut zal zijn, is de volgende: Zij Q een willekeurig punt der ruimte R_{n+1}. Het punt, waarvan de eerste n coördinaten dezelfde zijn als die van Q, terwijl de coördinaat $x_{n+1} = 0$, heet de *projectie* van Q op de ruimte R_n. De verzameling der projecties van de punten eener puntverzameling heet de projectie van die puntverzameling. De lezer bewijze de volgende stelling:

Stelling. *De projectie van een gesloten, $(n+1)$-dimensionaal interval op de ruimte $x_{n+1} = 0$ is een gesloten n-dimensionaal interval; die van een open $(n+1)$-dimensionaal interval is een open n-dimensionaal interval.*

Een puntverzameling, welke een deelverzameling is eener n-dimensionale ruimte R_n, zullen wij in het vervolg kortweg een „n-dimensionale puntverzameling" noemen.

§ 73. Laat in een n-dimensionale ruimte R_n een puntverzameling V gegeven zijn. Wij identificeeren, zooals dit in de vorige § uiteengezet is, de ruimte R_n met de verzameling der punten eener R_{n+1}, waarvoor $x_{n+1} = 0$. Zij verder h een willekeurig, reëel getal.

In de ruimte R_{n+1} beschouwen wij nu de verzameling C der punten, die aan de beide volgende voorwaarden voldoen:

1⁰. de projectie van zulk een punt op de ruimte R_n is een punt van de verzameling V.

2⁰. de coördinaat x_{n+1} van zulk een punt voldoet aan één der betrekkingen:

$$0 \leqq x_{n+1} \leqq h$$
$$h \leqq x_{n+1} \leqq 0,$$

naarmate h positief of negatief is (eventueel aan beide, wanneer $h = 0$).

Deze verzameling C noemen wij een *$(n+1)$-dimensionale cylinder*, en de verzameling V de *basis* van dien cylinder. De volstrekte waarde van het getal h heet de *hoogte* van den cylinder.

In de volgende § zullen wij steeds onderstellen, dat h positief is. Eigenschappen en bewijzen gelden met voor de hand liggende wijzigingen, wanneer h negatief is.

De lezer bewijze de volgende stellingen:

Stelling. *Is een eindig of oneindig aantal n-dimensionale puntverzamelingen gegeven, en beschouwen wij de cylinders, die deze puntverzamelingen tot bases hebben, terwijl het getal h een gegeven waarde heeft, dan is de vereeniging van deze cylinders een cylinder, die de vereeniging van de gegeven puntverzamelingen tot basis heeft.*

Stelling. *Is een eindig of oneindig aantal n-dimensionale puntverzamelingen gegeven, en beschouwen wij de cylinders, die deze puntverzamelingen tot bases hebben, terwijl het getal h een gegeven waarde heeft, dan is de doorsnede van deze cylinders een cylinder, die de doorsnede van de gegeven puntverzamelingen tot basis heeft.*

§ 74. **Stelling.** *Een $(n+1)$-dimensionale cylinder, die een gesloten, n-dimensionaal interval tot basis heeft, is een gesloten $(n+1)$-dimensionaal interval, waarvan de $(n+1)$-maat gelijk is aan het product van de hoogte en de n-maat van het basisinterval.*

Het basisinterval zij gedefiniëerd door de betrekkingen:

$$a_k \leqq x_k \leqq b_k \ldots\ldots (k=1, 2, \ldots . n) \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Voor ieder punt van den cylinder gelden deze betrekkingen ook. Verder geldt, wanneer wij, zooals boven afgesproken is, het geval van een positieve waarde van h beschouwen:

$$0 \leqq x_{n+1} \leqq h. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

De betrekkingen (1) en (2) definiëeren een $(n+1)$-dimensionaal, gesloten interval, waarmee het eerste deel der stelling bewezen is. De $(n+1)$-maat van dit interval is het product van zijn lengten. Nu zijn de eerste n dezer lengten de lengten van het basisinterval, terwijl de $(n+1)^e$ lengte de waarde h heeft. Hieruit volgt het tweede deel der stelling.

Vervangt men in één of meer der betrekkingen (1) één der teekens $\leqq$ door $=$ dan vindt men, dat een *cylinder, die een deel der begrenzing van een n-dimensionaal interval tot basis heeft, een deel der begrenzing van een $(n+1)$-dimensionaal interval is, en dus de $(n+1)$-maat 0 heeft.*

§ 75. **Stelling.** *Een $(n+1)$-dimensionale cylinder, die een n-dimensionale open puntverzameling tot basis heeft, is een meetbare $(n+1)$-dimensionale puntverzameling, waarvan de $(n+1)$-maat gelijk is aan het product van de n-maat van de basisverzameling en de hoogte $|h|$.*

Zij U de genoemde basisverzameling. Volgens hoofdstuk II, § 30, kan men U verkrijgen als vereeniging van aftelbaar vele, n-dimensionale, gesloten intervallen, zóódanig, dat twee dezer intervallen hoogstens een deel hunner begrenzing gemeen hebben.

De cylinder C, die U tot basis heeft, is de vereeniging van cylinders, die de genoemde intervallen tot bases hebben; zij is dus de vereeniging van aftelbaar vele, $(n+1)$-dimensionale intervallen, en dus meetbaar.

Daar twee der bovengenoemde, n-dimensionale intervallen hoogstens een deel hunner begrenzing, dus een puntverzameling van de maat 0, gemeen hebben, is de n-maat van U de som van de maten dier intervallen.

Volgens de laatste uitkomst der vorige § geldt hetzelfde voor twee der $(n+1)$-dimensionale intervallen, welker vereeniging de cylinder C is; de $(n+1)$-maat van C is dus de som van de maten dier $(n+1)$-dimensionale intervallen. En daar de $(n+1)$-maat van elk dezer laatste intervallen gelijk is aan het product van de hoogte en van de n-maat van het basisinterval, volgt hieruit de stelling onmiddellijk.

§ 76. **Stelling.** *Is een $(n+1)$-dimensionale cylinder gegeven, die een willekeurige, n-dimensionale puntverzameling tot basis heeft, dan is de $(n+1)$-maat van die cylinder gelijk aan het product van de hoogte en van de n-maat van de basisverzameling.*

Zij C de gegeven cylinder, V de basisverzameling. Wij zullen de $(n+1)$-maat van C aanduiden door mC, de n-maat van V door μV. Zij h de hoogte van C. (Wij nemen het getal h weer positief).

a. Wij zullen eerst bewijzen, dat $mC \leqq \mu V \times h$.

Zij ε een willekeurig, positief getal. Men kan dan een aftelbare verzameling van gesloten, n-dimensionale intervallen I vinden, die samen V overdekken, en waarvan de som der n-maten kleiner is dan $\mu V + \varepsilon$.

De $(n+1)$-dimensionale intervallen J, die deze intervallen I tot basis en een hoogte h hebben, overdekken den cylinder C. De som der $(n+1)$-maten van deze intervallen J is het product van h en van de som der n-maten van de intervallen I, dus kleiner dan $h\ (\mu V + \varepsilon)$. De $(n+1)$-maat van de *vereeniging* der intervallen J is dus ook kleiner dan dit bedrag, en dit geldt dus ook voor mC. En daar dit voor elke waarde van ε geldt, is $mC \leqq \mu V \times h$.

b. Wij bewijzen thans, dat $mC \geqq \mu V \times h$.

Zij ε een willekeurig, positief getal. Wij kunnen dan den cylinder

C overdekken door een aftelbaar aantal, gesloten $(n+1)$-dimensionale intervallen, H_1, H_2, ..., (die thans géén $(n+1)$-dimensionale *cylinders* behoeven te wezen), waarvan de som der $(n+1)$-maten kleiner is dan $mC+\varepsilon$. Laten de positieve getallen ε_1, ε_2, ... de termen zijn van een oneindig voortloopende reeks, waarvan de som kleiner is dan ε. Bij elk interval H_p bepalen wij nu een open interval H'_p, dat H_p bevat, en waarvan de $(n+1)$-maat die van H_p met minder dan ε_p overtreft. De open intervallen H'_p overdekken dan de puntverzameling C, en de som hunner $(n+1)$-maten is kleiner dan $mC+2\varepsilon$; hetzelfde geldt voor de $(n+1)$-maat van de open $(n+1)$-dimensionale puntverzameling O, welke de vereeniging der intervallen H'_p is.

Zij P een punt van de verzameling V. Men ziet gemakkelijk in, dat de punten van C, die P tot projectie hebben, (waartoe P zelf behoort), een afgesloten puntverzameling ω vormen. Elk punt van deze puntverzameling ω behoort tot één der open intervallen H'_p. Volgens de stelling van HEINE en BOREL kan men ω met een *eindig* aantal der intervallen H'_p overdekken. De projecties dezer eindig vele intervallen op de ruimte $x_{n+1}=0$ zijn even zoovele open, n-dimensionale intervallen, welke alle het punt P bevatten. De doorsnede dezer laatste intervallen is een open n-dimensionaal interval I', dat het punt P eveneens bevat.

Zij J' de $(n+1)$-dimensionale cylinder, die het zooeven geconstrueerde interval I' tot basis en een hoogte h heeft; deze cylinder bevat dan de puntverzameling ω. Bij ieder punt P van V kan men zulk een interval I' en zulk een cylinder J' vinden. De vereeniging van alle intervallen I' is een open puntverzameling V', die V bevat. De vereeniging der cylinders J' is de cylinder C', die V' tot basis heeft. Daar V' open is, is de $(n+1)$-maat van C' gelijk aan het product van h en van de n-maat van V'.

Het interval I', dat wij zooeven bij een punt P van V geconstrueerd hebben, was de doorsnede van de projecties van een eindig aantal intervallen H'_p, die de puntverzameling ω overdekten. Hieruit volgt, dat de cylinder J', die dezelfde hoogte als ω heeft, een deel is van de vereeniging van alle intervallen H'_p. Hetzelfde geldt dus voor de vereeniging van alle cylinders J', dus voor de cylinder C'. De $(n+1)$-maat van C' is dus niet grooter dan die van de vereeniging van alle intervallen H'_p, dus kleiner dan $mC+2\varepsilon$.

Hieruit volgt, dat de n-maat van V' kleiner is dan $\frac{1}{h}(mC+2\varepsilon)$. Daar V een deel is van V', geldt hetzelfde voor μV. En daar

dit waar moet wezen voor elke waarde van ε, heeft men

$$\mu V \leqq \frac{mC}{h}.$$

Hiermede is het gestelde bewezen.

§ 77. **Stelling.** *Een $(n+1)$-dimensionale cylinder, welke een n-dimensionale, meetbare puntverzameling tot basis heeft, is een $(n+1)$-dimensionale, meetbare puntverzameling.*

In § 74 is deze stelling bewezen voor het bijzondere geval, dat de basisverzameling een gesloten, n-dimensionaal interval is. Uit de stelling, welke in de vorige § bewezen werd, volgt verder, dat, als de basisverzameling de n-maat 0 heeft, de cylinder de $(n+1)$-maat 0 heeft, en dus een meetbare $(n+1)$-dimensionale puntverzameling is.

Zij nu de basisverzameling een open n-dimensionale puntverzameling. Zij is dan de vereeniging van aftelbaar vele, gesloten n-dimensionale intervallen. De cylinder is dan de vereeniging van aftelbaar vele cylinders, welke deze intervallen tot bases hebben; zij is dus meetbaar.

Zij nu de basisverzameling een *afgesloten* n-dimensionale puntverzameling B. Zij B' de n-dimensionale puntverzameling, welke in de ruimte R_n de complementairverzameling van B is. Een cylinder, welke B tot basis, en een hoogte h heeft, is de doorsnede van de verzameling der punten, waarvoor $0 \leqq x_{n+1} \leqq h$ is, met de complementairverzameling van den cylinder, die B' tot basis heeft. Daar B' een open n-dimensionale puntverzameling is, en dus de laatstgenoemde cylinder meetbaar, volgt hieruit de meetbaarheid van den eerstgenoemden cylinder.

Zij nu de basisverzameling een *inwendige grensverzameling*. Zij is dan de doorsnede van aftelbaar vele, n-dimensionale, open puntverzamelingen. De cylinder is nu de doorsnede van aftelbaar vele cylinders, welke de laatstgenoemde puntverzamelingen tot bases en eenzelfde hoogte hebben. Hieruit volgt de meetbaarheid.

De lezer behandele het geval, dat de basis een *uitwendige grensverzameling* is.

Zij nu de basis een willekeurige, meetbare, n-dimensionale puntverzameling B. Volgens het vorige hoofdstuk is B het verschil van een inwendige grensverzameling en een puntverzameling, waarvan de n-maat 0 is. De cylinder, die deze basis en een hoogte h heeft, is het verschil van de cylinders, die de beide laatste puntverzamelingen tot bases en dezelfde hoogte hebben. Hieruit volgt de meetbaarheid van den cylinder.

§ 78. **Stelling.** *Een* $(n+1)$*-dimensionale cylinder, welke een n-dimensionale, niet-meetbare puntverzameling tot basis heeft, is een niet-meetbare* $(n+1)$*-dimensionale puntverzameling.*

Zij B de basisverzameling. Is deze niet meetbaar, dan bestaat er een n-dimensionale puntverzameling U van eindige n-maat, zóódanig, dat:

$\mu U < \mu UB + \mu(U - UB)$, waarin het teeken μ de n-maat der bijbehoorende puntverzameling aanduidt.

Beschouwen wij nu de cylinders C en C_1, welke respectievelijk B en U tot basis hebben en eenzelfde hoogte. De cylinder CC_1 heeft dan UB tot basis, de cylinder $C_1 - CC_1$ heeft tot basis $U - UB$. De $(n+1)$-maat van elk dezer cylinders is het product van de hoogte en van de n-maat van de basis. Indien wij dus de $(n+1)$-maat door het teeken m aanduiden, heeft men:

$$mC_1 < mCC_1 + m(C_1 - CC_1).$$

Dit bewijst de niet-meetbaarheid van C.

Wij kunnen de stellingen van deze en de vorige § nu omkeeren tot de volgende

Stelling. *Een n-dimensionale puntverzameling is al of niet meetbaar, naarmate een* $(n+1)$*-dimensionale cylinder, die de genoemde puntverzameling tot basis heeft, al of niet meetbaar is.*

§ 79. De stellingen over $(n+1)$-dimensionale cylinders, die wij in de vorige §§ hebben afgeleid, zijn noodzakelijk voor de studie der functies, die op n-dimensionale puntverzamelingen gedefiniëerd zijn. Wij zullen thans tot de studie dezer functies overgaan.

Ons uitgangspunt is natuurlijk de definitie van § 71. In plaats van het daar genoemde symbool $f(x_1, x_2, \ldots . x_n)$, waarin x_1, $x_2, \ldots . x_n$ de coördinaten van een punt P zijn, zullen wij ook kortweg schrijven $f(P)$.

Zij dus op een puntverzameling A, die in een n-dimensionale ruimte R_n gelegen is, een functie $f(P)$ gedefiniëerd. Zooals dit in § 72 uiteengezet is, indentificeeren wij de ruimte R_n met de verzameling der punten eener ruimte R_{n+1}, waarvoor $x_{n+1} = 0$.

Zij P een bepaald punt van de verzameling A. De verzameling der punten van de ruimte R_{n+1}, die voldoen aan de volgende voorwaarden:

1⁰. De projectie van zulk een punt op de ruimte R_n valt met P samen.

2⁰. De coördinaat x_{n+1} van zulk een punt is òf nul, òf heeft hetzelfde teeken als $f(P)$.

3⁰. De volstrekte waarde van die coördinaat x_{n+1} is niet grooter dan die van $f(P)$,

heet de **ordinaat**, die bij het punt P en de functie $f(P)$ behoort.

De verzameling van alle punten van de ordinaten, die bij de punten P der verzameling A behooren, is een $(n+1)$-dimensionale puntverzameling. Deze heet de **ordinaatverzameling**, die bij de functie $f(P)$ behoort.

Is deze ordinaatverzameling een *meetbare*, $(n+1)$-dimensionale puntverzameling en is A een meetbare n-dimensionale puntverzameling dan heet de functie $f(P)$ **meetbaar**. In elk ander geval heet zij *niet-meetbaar*.

§ 80. Zij in een ruimte R_n een puntverzameling V gegeven. De functie $f(P)$ die de waarde $+1$ heeft in de punten van V, de waarde 0 in de punten der complementairverzameling van V, heet de **karakteristieke functie** der puntverzameling V. De puntverzameling A, waarop deze functie gedefiniëerd is, is klaarblijkelijk de geheele ruimte R_n.

De punten der ordinaatverzameling kunnen alleen dan hun coördinaat x_{n+1} van 0 verschillend hebben, wanneer hun projectie een punt van V is; in dit geval kan x_{n+1} nièt negatief zijn en hoogstens de waarde $+1$ hebben. Hieruit volgt, dat deze ordinaatverzameling de vereeniging is van de ruimte R_n met een $(n+1)$-dimensionale cylinder C, die de puntverzameling V tot basis en de hoogte 1 heeft.

Hieruit volgt, dat de ordinaatverzameling van $f(P)$ al of niet meetbaar is, naarmate de cylinder C al of niet meetbaar is, (daar R_n een $(n+1)$-dimensionale puntverzameling van de maat 0 is), En, daar de meetbaarheid van C volgens § 78 afhangt van de meetbaarheid van de basis V heeft men de volgende

Stelling. *De karakteristieke functie eener puntverzameling V is al of niet meetbaar, naarmate V al of niet meetbaar is.*

§ 81. Het verband tusschen n-dimensionale puntverzamelingen en hun karakteristieke functies is zeer nauw. Om dit verband na te gaan, diene eerst het volgende.

Laten op een n-dimensionale puntverzameling A twee functies $f_1(P)$ en $f_2(P)$ gedefiniëerd zijn. Zij A' de verzameling van de punten van A, welke *niet* de eigenschap bezitten, dat één der beide functies in zulk een punt de waarde $+\infty$ en te gelijk de andere de waarde $-\infty$ heeft. Wij kunnen nu op de puntverzameling A' een nieuwe functie definiëeren, welker waarde in elk punt P van A' de som is van de waarden, die de twee gegeven functies in dit punt P aannemen. Deze nieuwe functie heet de *som* der beide gegeven functies.

Evenzoo verstaat men onder het **verschil** van 2 gegeven functies een nieuwe functie, welker waarde in elk punt gelijk is aan het verschil van de waarden der 2 gegeven functies in dat punt. Zij is gedefiniëerd op de verzameling A'' der punten van A, welke *niet* de eigenschap bezitten, dat beide gegeven functies in zulk een punt de waarde $+\infty$ of de waarde $-\infty$ aannemen.

De lezer geve de analoge definities voor het **product** en het **quotiënt** van 2 functies, die op eenzelfde puntverzameling A gedefiniëerd zijn; hij onderzoeke, op welke puntverzamelingen deze nieuwe functies gedefiniëerd zijn. Evenzoo beschouwe hij het geval van de som en het product van een eindig aantal functies.

Stelling. *De karakteristieke functie van de som van 2 gegeven puntverzamelingen, is de som harer karakteristieke functies.*

Laten V_1 en V_2 de 2 gegeven puntverzamelingen zijn, $f_1(P)$ en $f_2(P)$ haar karakteristieke functies. Het gebruik van de term „som der 2 gegeven puntverzamelingen" sluit in, dat V_1 en V_2 geen punt gemeen hebben. Een punt P van de verzameling $V_1 + V_2$ zal dus, als het tot V_1 behoort, niet tot V_2 behooren. In dit geval is $f_1(P) = +1$, $f_2(P) = 0$, en de som der beide functies heeft dus de waarde $+1$. Dezelfde uitkomst vindt men, als P wèl tot V_2, doch niet tot V_1 behoort.

Behoort P nièt tot $V_1 + V_2$, dan behoort het nòch tot V_1, nòch tot V_2. Beide functies hebben dan in het punt P de waarde 0, dus ook hun som. De genoemde som heeft dus de waarde $+1$ in de punten van $V_1 + V_2$, de waarde 0 in alle andere punten; zij is dus de karakteristieke functie van de puntverzameling $V_1 + V_2$.

Door volledige inductie vindt men de overeenkomstige stelling voor de som van een *eindig* aantal puntverzamelingen.

De lezer bewijze de

Stelling: *De karakteristieke functie van de doorsnede van een eindig aantal puntverzamelingen is het product hunner karakteristieke functies.*

§ **82.** Laten op een puntverzameling A eindig of oneindig vele functies $f_1(P)$, $f_2(P)$, enz. gedefiniëerd zijn. De waarden dezer functies in een punt P van A vormen een niet-leege getallenverzameling, welke dus een bovenste grens $G(P)$ en een onderste grens $g(P)$ heeft. Aan elke punt P van A zijn op deze wijze een getal $G(P)$ en een getal $g(P)$ toegevoegd, en men kan dus zeggen, dat op de puntverzameling A een functie $G(P)$ en een functie $g(P)$ gedefiniëerd zijn. Deze functies heeten respectievelijk de *bovenste grens* en de *onderste grens* van de gegeven verzameling functies.

Wij bewijzen nu de volgende

Stelling: *Is een verzameling van eindig of oneindig vele puntverzamelingen gegeven, dan is de bovenste grens van de karakteristieke functies dier puntverzamelingen de karakteristieke functie van haar vereeniging, de onderste grens is de karakteristieke functie van haar doorsnede.*

Zij n.l. P een punt van de vereeniging. Dit punt P behoort dan tot minstens één der gegeven puntverzamelingen, en minstens één der karakteristieke functies heeft dus in P de waarde $+1$, terwijl geen enkele een grootere waarde kan hebben. De bovenste grens heeft dus in P de waarde $+1$. Behoort P nièt tot de vereeniging, dan hebben alle karakteristieke functies in P de waarde o, dus ook haar bovenste grens. Hieruit volgt het eerste gedeelte der stelling.

Op analoge wijze bewijst men het tweede gedeelte, hetgeen wij aan den lezer overlaten.

§ **83.** Zij gegeven een puntverzameling A, en laat volgens een zekere wet aan ieder natuurlijk getal k een functie $f_k(P)$ toegevoegd zijn, die op A gedefiniëerd is. Deze functies vormen dan een **rij van functies**. Het begrip „rij van functies" is dus analoog aan de begrippen „rij van getallen" en „rij van puntverzamelingen", die respectievelijk in Hoofdstuk I en Hoofdstuk II gedefiniëerd zijn.

De waarden der functies $f_k(P)$ in eenzelfde punt P van A vormen een rij van getallen. Volgens Hoofdstuk I, § 14, bezit deze rij een bovenste limiet $L(P)$ en een onderste limiet $l(P)$. Daar aan elk punt P van A een getal $L(P)$ en een getal $l(P)$ toegevoegd zijn, zijn op A een functie $L(P)$ en een functie $l(P)$ gedefiniëerd. Deze functies heeten de **bovenste limiet** en de **onderste limiet** van de gegeven functierij. Zijn de waarden dezer twee functies in elk punt P van A aan elkander gelijk, dan heeten zij elk de **limiet** der gegeven rij en heet deze rij **convergent**.

Stelling. *Is een rij van puntverzamelingen gegeven, dan is de bovenste limiet van de rij der bijbehoorende karakteristieke functies de karakteristieke functie van de bovenste limiet der gegeven rij. De analoge stelling geldt voor de onderste limiet.*

Laten $V_1, V_2, \ldots$ de puntverzamelingen der gegeven rij zijn, $f_1(P), f_2(P) \ldots$ de bijbehoorende karakteristieke functies. Zij W_k de vereeniging van alle puntverzamelingen der gegeven rij, waarvan de index $\geqq k$ is, en zij $G_k(P)$ de bovenste grens van de bijbehoorende karakteristieke functies. Volgens de vorige § is dan $G_k(P)$ de karakteristieke functie van W_k. De bovenste

limiet Λ van de gegeven rij van puntverzamelingen is nu de doorsnede van de puntverzamelingen W_k, en de bovenste limiet $L(P)$ van de gegeven rij van functies is de onderste grens der functies $G_k(P)$. Uit de stelling van de vorige § volgt nu weer, dat $L(P)$ de karakteristieke functie van Λ is, waarmee het eerste deel van de stelling bewezen is.

Op analoge wijze bewijst men het tweede deel van het gestelde; dit laten wij aan den lezer over.

§ 84. Zij m een natuurlijk getal, en laten m puntverzamelingen V_1, $V_2, \ldots V_m$ in een n-dimensionale ruimte R_n gegeven zijn. Laten $f_1(P)$, $f_2(P), \ldots f_m(P)$ de bijbehoorende karakteristieke functies zijn, en laten c_1, $c_2, \ldots, c_m$ eindige reëele getallen zijn. Door de formule:

$$\varphi(P) = c_1 f_1(P) + c_2 f_2(P) + \ldots + c_m f_m(P) \quad . \quad . \quad (1)$$

wordt een functie $\varphi(P)$ gedefiniëerd in elk punt der n-dimensionale ruimte R_n. Een functie, die op deze wijze kan worden voorgesteld, zullen wij een **karakteristieke som** noemen.

Stelling. *Een functie, die in de geheele ruimte R_n gedefiniëerd is, en slechts een eindig aantal eindige waarden kan aannemen, is een karakteristieke som.*

Laten α_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_m$ de genoemde waarden zijn. Zij V_k de verzameling der punten, waar de gegeven functie $\varphi(P)$ de waarde α_k aanneemt; zij $f_k(P)$ de karakteristieke functie van V_k.

De m puntverzamelingen V_k hebben dan 2 aan 2 geen enkel punt gemeen, terwijl haar vereeniging de geheele ruimte R_n is. Beschouwen wij nu de som $\alpha_1 f_1(P) + \alpha_2 f_2(P_2) + \ldots + \alpha_m f_m(P)$. In een punt P, dat tot de puntverzameling V_k behoort, bezit de karakteristieke functie $f_k(P)$ de waarde $+1$, de andere functies hebben de waarde 0. De beschouwde som heeft dus in het punt P de waarde α_k en dus gelijk aan de functie $\varphi(P)$. Daar deze redeneering voor ieder punt P der ruimte R_n geldt, is hiermede de stelling bewezen.

Het omgekeerde dezer stelling is direct duidelijk; immers, in de uitdrukking (1) kan de k^{de}-term alleen de waarden 0 en c_k aannemen, en de geheele som kan dus slechts 2^m verschillende waarden aannemen.

Wij kunnen in het voorbijgaan even opmerken dat de puntverzamelingen V_1, $V_2, \ldots$ met behulp waarvan in het *begin* dezer § de karakteristieke som gedefiniëerd werd, zeer goed punten gemeen kunnen hebben. Uit het gegeven bewijs volgt nu, dat men haar vervangen kan door puntverzamelingen, die 2 aan 2 geen enkel punt gemeen hebben, n.l. de verzamelingen

der punten, waar de som haar verschillende waarden aanneemt. Uit de bewezen stelling volgt nu de

Stelling. *De som van een eindig aantal karakteristieke sommen is weer een karakteristieke som.*

Immers, elk der afzonderlijke sommen is in de geheele ruimte R_n gedefiniëerd en eindig, en kan slechts een eindig aantal waarden aannemen; hetzelfde geldt dus voor hun som, waaruit de stelling volgt.

Evenzoo bewijst men:

Stelling. *Het product van een eindig aantal karakteristieke sommen is weer een karakteristieke som.*

Stelling. *Het quotient van 2 karakteristieke sommen is weer een karakteristieke som, indien de deeler nooit nul wordt.*

De ordinaatverzameling eener karakteristieke som is de som van m cylinders, die tot bases hebben de puntverzamelingen, waarop de functie haar m verschillende waarden aanneemt. Zijn deze dus *alle* meetbaar, dan is de functie meetbaar. Wij zullen later bewijzen, dat dit voor de meetbaarheid der karakteristieke som ook *noodzakelijk* is.

§ 85. Wij zullen thans de eigenschappen der ordinaatverzamelingen en haar verband met de bijbehoorende functies nader bestudeeren.

In § 79 hebben wij de *ordinaat* gedefiniëerd, die bij een punt P en een functie $f(P)$ behoort. Het punt dezer ordinaat, waarvoor $x_{n+1} = f(P)$, zullen wij het *uiteinde* of het *eindpunt* der ordinaat noemen.

Stelling. *De maat eener ordinaatverzameling verandert niet, indien men van deze verzameling aftrekt de verzameling van de uiteinden der tot haar behoorende ordinaten.*

Zij Ω de gegeven ordinaatverzameling. Op de ruimte R_{n+1} passen wij nu toe de transformatie:

$$\bar{x}_k = x_k \ldots . (k = 1,\ 2, \ldots . \ n)$$
$$\bar{x}_{n+1} = \lambda x_{n+1}.$$

Zij $\Omega(\lambda)$ de puntverzameling, waarin de puntverzameling Ω door deze transformatie overgaat. Volgens het vorige hoofdstuk is dan de maat van $\Omega(\lambda)$ gelijk aan de maat van Ω, vermenigvuldigd met λ. Wij laten nu λ een monotone, niet afnemende getallenrij doorloopen, die 1 tot limiet heeft, doch waarvan geen der getallen gelijk aan 1 is. De bijbehoorende puntverzamelingen $\Omega(\lambda)$ vormen een rij, waarvan iedere verzameling, zooals men gemakkelijk inziet, een deel is van alle volgende, De vereeniging van deze puntverzamelingen $\Omega(\lambda)$ bevat alle punten

van Ω, behalve de uiteinden van die ordinaten, welke uit meer dan een punt bestaan; immers deze uiteinden behooren alleen dan tot een puntverzameling $\Omega(\lambda)$, indien $\lambda \geqq 1$ is.

De maat dezer vereeniging is niet kleiner dan die van een der puntverzamelingen $\Omega(\lambda)$, en kan dus niet kleiner dan die van Ω zijn. Aan den anderen kant is zij niet grooter dan die van Ω; zij is er dus aan gelijk.

Hiermee is bewezen, dat de maat van Ω niet verandert door weglating van de uiteinden der ordinaten, die uit meer dan een punt bestaan. De uiteinden der overige ordinaten behooren tot de ruimte R_n en vormen dus een puntverzameling, waarvan de $(n+1)$-maat de waarde nul heeft; ook hun weglating heeft dus geen invloed op de maat van Ω. Hiermede is de stelling bewezen.

Is in het bijzonder de ordinaatverzameling Ω *meetbaar*, dan volgt uit deze stelling, *dat de verzameling van de uiteinden der ordinaten de maat nul heeft.*

Is Ω de ordinaatverzameling eener functie $f(P)$, dan ziet men onmiddellijk, dat een puntverzameling $\Omega(\lambda)$ de ordinaatverzameling is der functie $\lambda f(P)$. Daar bij de bovengenoemde transformatie, en evenzoo bij hare inverse, een meetbare puntverzameling meetbaar blijft, zijn Ω en $\Omega(\lambda)$ te gelijk al of niet meetbaar Verder zijn de functies $f(P)$ en $\lambda f(P)$ op eenzelfde puntverzameling A gedefiniëerd. Hieruit volgt:

Stelling. *Een meetbare functie blijft meetbaar, indien men haar met een constante vermenigvuldigt.*

§ 86. Zij op een puntverzameling A een functie $f(P)$ gedefiniëerd. Wij definiëeren nu op A twee nieuwe functies, die wij door $f_+(P)$ en $f_-(P)$ zullen aanduiden.

De functie $f_+(P)$ is gelijk aan $f(P)$ in alle punten, waar $f(P)$ positief is; zij is nul in de punten van A, waar $f(P)$ negatief of nul is. De functie $f_-(P)$ is gelijk aan $f(P)$ in de punten, waar $f(P)$ negatief is; zij is nul in de punten, waar $f(P)$ positief of nul is.

Klaarblijkelijk is: $f(P) = f_+(P) + f_-(P)$.

De ordinaatverzameling van $f(P)$ is de vereeniging van de ordinaatverzamelingen van $f_+(P)$ en van $f_-(P)$. Elke ordinaat van $f(P)$ toch, die uit meer dan één punt bestaat, behoort òf tot $f_+(P)$ òf tot $f_-(P)$, terwijl de ordinaten, die slechts uit één punt bestaan, tot beide behooren. De ordinaatverzamelingen van $f_+(P)$ en van $f_-(P)$ hebben juist de puntverzameling A gemeen.

Laten nu op een puntverzameling A een eindig of oneindig aantal functies $f(P)$ gedefiniëerd zijn; zij $G(P)$ de bovenste grens

dezer functies. Wij kunnen dan gemakkelijk bewijzen, dat $G_+(P)$ de bovenste grens is der functies $f_+(P)$ en $G_-(P)$ de bovenste grens der functies $f_-(P)$.

Zij n.l. in een punt P_0 de functie $G(P)$ positief en dus gelijk aan $G_+(P)$. Van de getallen $f(P_0)$ is dan minstens één positief, en dus gelijk aan het bijbehoorende getal $f_+(P_0)$; de bovenste grens van de verzameling der getallen $f(P_0)$ verandert dan niet, indien men de negatieve getallen dezer verzameling door 0 vervangt, zoodat $G(P_0) = G_+(P_0)$ ook de bovenste grens der getallen $f_+(P_0)$ is.

Is in P_0 de functie $G(P)$ gelijk aan 0, dan zijn alle getallen $f(P_0)$ negatief of nul, en dus gelijk aan de getallen $f_-(P_0)$, terwijl alle getallen $f_+(P_0)$ gelijk 0 zijn. Het getal $G(P_0)$ is dan zoowel de bovenste grens der getallen $f_+(P_0)$ als der getallen $f_-(P_0)$.

Is ten slotte $G(P_0)$ negatief, dan zijn alle getallen $f(P_0)$ negatief, en dus gelijk aan de bijbehoorende getallen $f_-(P_0)$, zoodat $G_-(P_0) = G(P_0)$ de bovenste grens dezer getallen is. De getallen $f_+(P_0)$ zijn dan allen 0, en $G_+(P_0)$ is dit ook, dus gelijk aan hun bovenste grens. Hiermede is de stelling bewezen.

Op analoge wijze bewijst men, dat, als $g(P)$ de onderste grens der functies $f(P)$ is, de functie $g_+(P)$ de onderste grens is der functies $f_+(P)$ en $g_-(P)$ de onderste grens der functies $f_-(P)$. Dit bewijs laten wij aan den lezer over.

Laat thans op een puntverzameling A een *rij* van functies $f(P)$ gedefiniëerd zijn. Door de bovenste grens te nemen van de functies der rij, welker index minstens gelijk is aan een natuurlijk getal k, en van deze bovenste grenzen weer de onderste grens te nemen, verkrijgt men de *bovenste limiet* van de rij. Duiden wij deze aan door $L(P)$, dan volgt uit de zooeven bewezen stellingen, dat de functie $L_+(P)$ de bovenste limiet is van de rij der functies $f_+(P)$, en de functies $L_-(P)$ de bovenste limiet is van de rij der functies $f_-(P)$. De analoge stelling geldt weer voor de *onderste limiet* der gegeven rij.

§ **87.** Laten weer op een puntverzameling A een eindig of oneindig aantal functies $f(P)$ gedefiniëerd zijn, en zij weer $G(P)$ de bovenste grens dezer functies. Wij bewijzen nu de volgende

Stelling. *De ordinaatverzameling van de functie $G_+(P)$ verkrijgt men door de ordinaatverzamelingen der functies $f_+(P)$ te vereenigen en hierbij een (eventueel leege) verzameling van ordinateneindpunten op te tellen. De ordinaatverzameling der functie $G_-(P)$ is de doorsnede van de ordinaatverzamelingen der functies $f_-(P)$.*

Zij P_0 een punt van A. De coördinaten x_{n+1} van de punten

der bij P_0 behoorende ordinaat eener functie $f_+(P)$ vormen een één-dimensionaal interval, dat de getallen 0 en $f_+(P_0)$ tot uiteinden heeft. Op deze wijze behooren bij het punt P_0 eindig of oneindig vele, één-dimensionale intervallen. Ieder positief getal dat kleiner dan $G_+(P_0)$ is, behoort tot minstens één dezer intervallen, waaruit volgt, dat het interval, welks uiteinden 0 en $G_+(P_0)$ zijn, de vereeniging is van de genoemde intervallen en van het punt $G_+(P_0)$; dit laatste punt behoort al of niet tot de genoemde vereeniging naarmate $G_+(P_0)$ al of niet gelijk is aan een der getallen $f_+(P_0)$. Het laatstgenoemde interval geeft nu echter juist de ordinaat, die bij het punt (P_0) en de functie $G_+(P)$ behoort, terwijl $G_+(P_0)$ de coördinaat x_{n+1} van het eindpunt dezer ordinaat is. Hieruit volgt het eerste deel der bovengenoemde stelling. Het bewijs van het tweede deel laten wij aan den lezer over.

In het voorbijgaan maken wij de volgende opmerking. Laat men van een of meer der bovengenoemde, bij een punt P_0 behoorende, intervallen het uiteinde $f_+(P_0)$ weg, dan kan hun vereeniging geen andere wijziging ondergaan dan dat het punt $G_+(P_0)$, zoo het oorspronkelijk wèl tot de vereeniging behoorde, er later niet meer toe behoort; immers, ieder getal, dat kleiner is dan $G_+(P_0)$, is *inwendig* punt van minstens één interval. Hieruit volgt, dat, wanneer men van elk der ordinaatverzamelingen van de functies $f_+(P)$ een verzameling van ordinateneindpunten aftrekt, de vereeniging der overblijvende verzamelingen zich nog steeds van de ordinaatverzameling van $G_+(P)$ hoogstens door een verzameling van ordinateneindpunten onderscheiden zal.

Een analoge uitkomst geldt voor de doorsnede van de ordinaatverzamelingen der functies $f_-(P)$ ten opzichte van de ordinaatverzameling der functie $G_-(P)$.

De lezer bewijze de overeenkomstige stelling voor de *onderste* grens van een verzameling functies. Hij zal vinden, dat men dan de *doorsnede* moet bepalen van de ordinaatverzamelingen der functies $f_+(P)$ en de vereeniging van de ordinaatverzamelingen der functies $f_-(P)$.

§ 88. Laat nu op een puntverzameling A een *rij* van functies $f(P)$ gedefiniëerd zijn. Vereenigt men de ordinaatverzamelingen der functies $f_+(P)$, welker index een natuurlijk getal k overtreft, dan verkrijgt men op een verzameling van ordinateneindpunten na de ordinaatverzameling van de bovenste grens dezer functies. Vormt men nu de doorsnede van deze vereenigingen, dan verkrijgt men (weer op een verzameling van ordinatenateneindpunten na), de ordinaatverzameling van de onderste grens dier bovenste

grenzen, dat is de ordinaatverzameling der functie $L_+(P)$. Men heeft dus de

Stelling: *De bovenste limiet van de ordinaatverzamelingen van de functies* $f_+(P)$ *is, op een verzameling van ordinateneindpunten na, de ordinaatverzameling van de bovenste limiet der functies* $f_+(P)$.

Analoge stellingen gelden voor de onderste limiet der functies $f_+(P)$ en voor de bovenste en onderste limiet der functies $f_-(P)$. De lezer ga dit zorgvuldig na.

§ 89. Om uit de laatst verkregen uitkomsten gevolgtrekkingen te kunnen maken, diene eerst het volgende:

In § 79 hebben wij een functie $f(P)$ *meetbaar* genoemd, indien de ordinaatverzameling der functie een meetbare, $(n+1)$-dimensionale puntverzameling is, en bovendien de puntverzameling A, waarop de functie gedefiniëerd is, een meetbare n-dimensionale puntverzameling. Wij bewijzen nu de volgende

Stelling. *Is* $f(P)$ *een meetbare functie, dan zijn de functies* $f_+(P)$ *en* $f_-(P)$ *eveneens meetbaar. Zijn omgekeerd* $f_+(P)$ *en* $f_-(P)$ *meetbaar, dan is* $f(P)$ *meetbaar.*

Zij ten eerste $f(P)$ meetbaar, dus ook de puntverzameling A. Daar $f_+(P)$ en $f_-(P)$ eveneens op A gedefiniëerd zijn, is aan de tweede voorwaarde der meetbaarheid voor deze functies voldaan. Verder is de ordinaatverzameling van $f_+(P)$ de doorsnede van de ordinaatverzameling van $f(P)$ met de verzameling der punten, waarvoor $x_{n+1} \geqq 0$; zij is dus meetbaar als doorsnede van 2 meetbare puntverzamelingen. Evenzoo is de ordinaatverzameling van $f_-(P)$ de doorsnede van die van $f(P)$ met de verzameling der punten, waarvoor $x_{n+1} \leqq 0$.

Zijn omgekeerd $f_+(P)$ en $f_-(P)$ meetbaar, dan is A dit ook; en de ordinaatverzameling van $f(P)$ is meetbaar, daar zij de vereeniging is van de ordinaatverzamelingen van $f_+(P)$ en van $f_-(P)$.

§ 90. In § 85 is aangetoond, dat, wanneer een ordinaatverzameling meetbaar is, de verzameling van de uiteinden der ordinaten de maat nul heeft. Hieruit volgt, dat een meetbare ordinaatverzameling meetbaar blijft, indien men haar vermindert met een verzameling van ordinateneindpunten; deze laatste toch is, daar zij de maat nul heeft, eveneens meetbaar. Wij zullen nu omgekeerd bewijzen:

Stelling. *Indien men uit een ordinaatverzameling een meetbare puntverzameling kan krijgen, door haar met een verzameling van ordinateneindpunten te verminderen, is de oorspronkelijke verzameling eveneens meetbaar.*

Zij Ω de gegeven ordinaatverzameling, Ω' de daaruit verkregen, meetbare puntverzameling. Wij passen nu op Ω' de transformatie toe:

$$\bar{x}_k = x_k \quad (k = 1, 2, \dots . n)$$

$$\bar{x}_{n+1} = \lambda x_{n+1}.$$

Zij $\Omega'(\lambda)$ de puntverzameling, waarin Ω' door deze transformatie overgaat. Wij laten nu λ een monotone, niet-toenemende getallenrij doorloopen, die 1 tot limiet heeft, doch waarvan geen der getallen gelijk aan 1 is. Zij Ω'' de doorsnede der bijbehoorende puntverzamelingen $\Omega'(\lambda)$; Ω'' is dan meetbaar als doorsnede van aftelbaar vele, meetbare puntverzamelingen.

Men ziet onmiddellijk, dat elke ordinaat van Ω, die bij de vorming van Ω' niet in zijn geheel is weggelaten, (hetgeen alleen mogelijk is, als hij slechts uit één punt bestond), tot alle puntverzamelingen $\Omega'(\lambda)$ behoort, dus ook tot Ω''; en dat het verschil van Ω en Ω'' alleen bestaat uit ordinaten, die in hun geheel weggelaten zijn. Deze verzameling $\Omega - \Omega''$ is echter meetbaar, daar zij een deelverzameling is van de verzameling der punten, waarvoor $x_{n+1} = 0$. De puntverzameling Ω is dus ook meetbaar.

§ 91. Laten nu op een puntverzameling A *aftelbaar* vele, meetbare functies $f(P)$ gedefiniëerd zijn. Volgens § 87 verschilt de ordinaatverzameling der functie $G_+(P)$ slechts door een verzameling van ordinateneindpunten van de vereeniging der ordinaatverzamelingen van de functies $f_+(P)$.

Uit de stellingen der beide laatste §§ volgt dus onmiddellijk, dat de ordinaatverzameling van $G_+(P)$ meetbaar is. Hetzelfde geldt voor de ordinaatverzameling van $G_-(P)$, daar deze de doorsnede is van de ordinaatverzamelingen der functies $f_-(P)$. Men heeft dus:

Stelling. *Zijn op een puntverzameling A aftelbaar vele, meetbare functies gedefiniëerd, dan is de bovenste grens dezer functies eveneens meetbaar.*

Dezelfde stelling geldt natuurlijk voor de onderste grens. Zij nu op een puntverzameling A een *rij* van meetbare functies gedefiniëerd. Men kan de laatste stellingen nu toepassen op de verzameling der functies van de rij, welker index een natuurlijk getal k overtreft. Past men dan op de verkregen bovenste en onderste grenzen dezelfde stellingen toe, dan verkrijgt men:

Stelling. *De bovenste en de onderste limiet van een rij meetbare functies zijn weer meetbaar.*

In het bijzonder volgt hieruit de zeer belangrijke:

Stelling. *De limiet van een convergente rij meetbare functies is weer een meetbare functie.*

§ 92. In de §§ 73 tot 78 hebben wij de eigenschappen bestudeerd van $(n+1)$-dimensionale cylinders, welke een n-dimensionale puntverzameling V tot basis en de hoogte $|h|$ hebben. Voor wij verder gaan, moeten wij deze theorie even aanvullen.

Laten aftelbaar vele, $(n+1)$-dimensionale cylinders gegeven zijn, welke *eenzelfde* n-dimensionale puntverzameling V tot basis hebben, terwijl de bijbehoorende getallen h positief zijn, en een *niet-begrensde* getallenverzameling vormen. De vereeniging dezer cylinders bestaat blijkbaar uit alle punten der ruimte R_{n+1}, waarvan de coördinaat x_{n+1} positief of nul is, terwijl de projectie van zulk een punt op de ruimte R_n een punt is van V. Wij zullen zeggen, dat deze puntverzameling weer een cylinder is, waarvan het getal h de waarde $+\infty$ heeft.

Is de basis V een n-dimensionale, meetbare puntverzameling, dan is volgens § 77 elke cylinder, die V tot basis en een eindige hoogte heeft, meetbaar. Hetzelfde geldt dus voor den cylinder, waarvoor $h=+\infty$, daar deze de vereeniging is van aftelbaar vele cylinders van eindige maat.

Is de basis V *niet meetbaar*, dan is de beschouwde cylinder dit ook niet. Was hij dit n.l. wel, dan zou hetzelfde gelden voor zijn doorsnede met de verzameling der punten waarvoor $0 \leqq x_{n+1} \leqq 1$; deze doorsnede nu is een cylinder, die V tot basis en een hoogte 1 heeft, en dus volgens § 78 niet meetbaar.

Wij kunnen ook de verzameling beschouwen van de punten der ruimte R_{n+1}, waarvan de projectie op de ruimte R_n een punt is van een gegeven puntverzameling V, terwijl de coördinaat x_{n+1} *negatief* of nul is. Deze puntverzameling zullen wij weer een cylinder noemen, waarvan het getal h de waarde $-\infty$ heeft. Door de transformatie:

$$\bar{x}_k = x_k \quad (k=1,\ 2, \ldots \, n)$$

$$\bar{x}_{n+1} = -x_{n+1}$$

gaat zulk een cylinder over in een cylinder van de eerst beschouwde soort, zoodat voor de meetbaarheid dezelfde eigenschappen gelden.

§ 93. Wij zullen thans eenige belangrijke eigenschappen der meetbare functies afleiden.

Stelling. *Is op een n-dimensionale puntverzameling A een meetbare functie f(P) gedefiniëerd, dan is de verzameling der*

punten van A, waar f(P) positief is, een meetbare n-dimensionale puntverzameling.

Zij Γ de puntverzameling, welke bestaat uit de ordinaten, die bij de positieve waarden van $f(P)$ behooren (d.w.z. bij de punten van A, waar $f(P)$ positief is). Elke ordinaat van Γ bevat dan minstens één punt, waarvan de coördinaat x_{n+1} positief is.

De puntverzameling Γ is *meetbaar.* Immers, zij verschilt van de ordinaatverzameling van $f_{+}(P)$ alleen door de verzameling der punten van A, waar $f_{+}(P)$ de waarde 0 heeft, en van deze laatste puntverzameling is de $(n+1)$-maat 0. Wij passen nu op Γ de transformatie toe:

$$\bar{x}_k = x_k \ (k = 1, 2, \ldots . n)$$
$$\bar{x}_{n+1} = p x_{n+1}.$$

Door deze transformatie gaat Γ in een meetbare puntverzameling $\Gamma(p)$ over. Wij laten p nu een *aftelbare, niet-begrensde* verzameling van positieve getallen doorloopen. De vereeniging der bijbehoorende puntverzamelingen $\Gamma(p)$ is, zooals men gemakkelijk inziet, een $(n+1)$-dimensionale cylinder, waarvoor $h = +\infty$; deze cylinder is dus eveneens meetbaar. De basis van dezen cylinder bestaat uit de punten van A, waarvoor $f(P)$ positief is; deze punten vormen dus een meetbare, n-dimensionale puntverzameling.

Op analoge wijze bewijst men, dat de verzameling der punten van A, waar $f(P)$ negatief is, een meetbare n-dimensionale puntverzameling is. En daar, krachtens de definitie der meetbaarheid van $f(P)$, de geheele puntverzameling A meetbaar is, geldt hetzelfde voor de verzameling der punten van A, waar $f(P)$ de waarde 0 heeft.

§ 94. **Stelling.** *Is f(P) een meetbare functie, die op een n-dimensionale puntverzameling A gedefiniëerd is, en is α een positief getal, dan is de verzameling der punten van A, waarvoor $f(P) > \alpha$, een meetbare n-dimensionale puntverzameling.*

Zij weer Ω de ordinaatverzameling van $f(P)$ en zij thans Γ de doorsnede van Ω met de verzameling der punten, waarvoor $x_{n+1} \geqq \alpha$. Het is duidelijk, dat Γ alleen punten bevat van de ordinaten, welke behooren bij de waarden van $f(P)$, die $\geqq \alpha$ zijn. Op deze puntverzameling Γ passen wij nu de transformatie toe:

$$\bar{x}_k = x_k \ (k = 1, 2, \ldots . n)$$
$$\bar{x}_{n+1} = x_{n+1} - \alpha.$$

Door deze transformatie gaat Γ over in de ordinaatverzameling

Γ' eener functie $\phi(P)$, welke gedefiniëerd is in de punten, waar $f(P) \geqq \alpha$, en waarvan de waarde in deze punten gelijk is aan $f(P) - \alpha$. Deze ordinaatverzameling Γ' is krachtens zijn ontstaanswijze meetbaar. Zij Γ'' het deel van Γ', dat gevormd wordt door de ordinaten van $\varphi(P)$, welke minstens één punt bevatten, waarvan de coördinaat x_{n+1} positief is. Deze puntverzameling Γ'' is dan eveneens meetbaar, daar het verschil $\Gamma' - \Gamma''$ eenvoudig bestaat uit de punten van A, waar $\varphi(P) = 0$, en dus de $(n+1)$-maat nul heeft.

Uit Γ'' kunnen wij nu, evenals wij dit in § 93 uit de daar beschouwde puntverzameling Γ gedaan hebben, een $(n+1)$-dimensionalen cylinder afleiden, waarvoor $h = +\infty$. De meetbaarheid van dezen cylinder is een gevolg van die van Γ''. En uit die meetbaarheid volgt weer de meetbaarheid van de n-dimensionale basis van den cylinder, dus van de verzameling der punten, waar $\phi(P) > 0$, of $f(P) > \alpha$ is.

§ 95. Op analoge wijze als dit in de vorige § geschied is, bewijst men de

Stelling. *Is $f(P)$ een meetbare functie, en is β een negatief getal, dan is de verzameling der punten, waar $f(P) < \beta$, een meetbare, n-dimensionale puntverzameling.*

Voor dit bewijs snijden wij de ordinaatverzameling van $f(P)$ met de verzameling der punten, waarvoor $x_{n+1} \leqq \beta$. Deze doorsnede transformeeren wij tot de ordinaatverzameling eener functie, die gedefiniëerd is in de punten, waar $f(P) \leqq \beta$, en die daar de waarde $f(P) + \beta$ heeft. Uit deze ordinaatverzameling leiden wij een $(n+1)$-dimensionalen cylinder af, waarvoor $h = -\infty$. Uit de meetbaarheid van dezen cylinder volgt dan de meetbaarheid der beschouwde puntverzameling.

Stelling. *Is $f(P)$ een meetbare functie, en is α een positief getal, dan is de verzameling der punten, waarvoor $f(P) \geqq \alpha$, een meetbare, n-dimensionale puntverzameling.*

Zij ε een positief getal, dat kleiner is dan α. Volgens de vorige § is de verzameling E der punten, waarvoor $f(P) > \alpha - \varepsilon$, een meetbare, n-dimensionale puntverzameling. Wij laten ε nu een monotone, niet-stijgende rij van positieve getallen doorloopen, die 0 tot limiet heeft. De doorsnede der bijbehoorende puntverzamelingen E is juist de verzameling der punten, waarvoor $f(P) \geqq \alpha$; deze puntverzameling is dus meetbaar als doorsnede van aftelbaar vele, meetbare puntverzamelingen.

Stelling. *Is $f(P)$ een meetbare functie, en is β een negatief getal, dan is de verzameling der punten, waarvoor $f(P) \leqq \beta$, een meetbare, n-dimensionale puntverzameling.*

Deze puntverzameling is n.l. de doorsnede van aftelbaar vele puntverzamelingen E, welke ieder bestaan uit de punten, waarvoor $f(P) < \beta + \varepsilon$; hierin is ε een positief getal, dat kleiner is dan $|\beta|$ en doorloopt ε een monotone, niet-stijgende getallenrij, die 0 tot limiet heeft.

Stelling. *Is $f(P)$ een meetbare functie, en is α een positief getal, dan is de verzameling der punten, waarvoor $f(P) < \alpha$, een meetbare, n-dimensionale puntverzameling; evenzoo de verzameling der punten, waar $f(P) \leqq \alpha$.*

De eerste der 2 genoemde puntverzamelingen is het verschil van de puntverzameling A, waarop $f(P)$ gedefiniëerd is, en van de verzameling der punten, waar $f(P) \geqq \alpha$; zij is dus meetbaar als verschil van 2 meetbare puntverzamelingen.

De tweede is het verschil van A en van de verzameling der punten, waar $f(P) > \alpha$; voor haar geldt dus hetzelfde.

Stelling. *Is $f(P)$ een meetbare functie, en is β een negatief getal, dan is de verzameling der punten, waar $f(P) > \beta$, een meetbare, n-dimensionale puntverzameling.*

Dit bewijst men op analoge wijze als de voorafgaande stelling.

Stelling. *Is $f(P)$ een meetbare functie en zijn γ en δ twee willekeurige getallen, dan is de verzameling der punten, waarvoor $\gamma < f(P) < \delta$, een meetbare, n-dimensionale puntverzameling.*

Deze puntverzameling toch is de doorsnede van de verzameling der punten, waar $f(P) > \gamma$, met de verzameling der punten, waar $f(P) < \delta$.

Evenzoo bewijst men de meetbaarheid der puntverzamelingen, waar $\gamma \leqq f(P) < \delta$, of waar $\gamma < f(P) \leqq \delta$, of waar $\gamma \leqq f(P) \leqq \delta$.

Laten wij nu in het bijzonder het geval beschouwen, dat de gegeven functie een *karakteristieke som* is. Wij kunnen de gegetallen γ en δ dan zoodanig kiezen, dat tusschen hen één en slechts één van de m waarden ligt, welke de functie kan aannemen. Uit de laatstbewezen stelling volgt dus, dat elk dezer waarden op een meetbare puntverzameling moet worden aangenomen. Is dit omgekeerd het geval, dan is de functie zeker meetbaar, daar haar ordinaatverzameling dan de som van m meetbare cylinders is. (Zie het slot van § 85). Wij hebben dus de

Stelling. *Een karakteristieke som is dàn en alleen dàn meetbaar, indien elk der puntverzamelingen, waarop zij haar verschillende waarden aanneemt, meetbaar is.*

§ **96**. Vóór we onze onderzoekingen voortzetten, willen we hier een opmerking inlasschen.

Zij A een puntverzameling, waarop een functie $f(P)$ gedefiniëerd is. Zij B een deelverzameling van A. Wij kunnen nu op B een

functie $\phi(P)$ definiëeren, die in elk punt van B dezelfde waarde heeft als $f(P)$.

Wij zullen in dit geval zeggen, dat $f(P)$ en $\phi(P)$ *dezelfde* functie zijn, doch in het eene geval op de puntverzameling A beschouwd, in het andere geval uitsluitend op B. In overeenstemming hiermede zullen wij zeggen, dat een functie *meetbaar is op een puntverzameling* B, (welke een deel is van de verzameling A, waarop de functie gedefiniëerd is) indien men een meetbare functie krijgt, door de gegeven functie uitsluitend op B te beschouwen.

Wij kunnen dan de stelling uitspreken:

Stelling. *Een meetbare functie is meetbaar op elke meetbare deelverzameling van de verzameling, waarop zij oorspronkelijk gedefiniëerd is.*

Zij A de verzameling, waarop de functie gedefiniëerd is, B een meetbaar deel van A. Zij O een puntverzameling, welke de vereeniging is van twee cylinders, die beide B tot basis hebben, terwijl de bijbehoorende getallen h respectievelijk $+\infty$ en $-\infty$ zijn. De ordinaatverzameling van de functie, welker waarden in de punten van B dezelfde zijn als die van de gegeven functie, verkrijgt men nu als doorsnede van de ordinaatverzameling der gegeven functie met de puntverzameling O. Die ordinaatverzameling is dus de doorsnede van 2 meetbare puntverzamelingen en dus zelf meetbaar, waaruit het gestelde volgt.

§ **97.** In § 95 hebben wij bewezen, dat, wanneer een functie $f(P)$ meetbaar is, de verzameling der punten, waarvoor $\gamma \leqq f(P) \leqq \delta$, n-dimensionaal meetbaar is. Wij zullen thans de omkeering dezer stelling bewijzen.

Stelling. *Is op een n-dimensionale puntverzameling een functie* $f(P)$ *gedefiniëerd, en is voor ieder paar eindige of oneindige getallen* γ *en* δ *de verzameling der punten, waarvoor* $\gamma \leqq f(P) \leqq \delta$, *n-dimensionaal meetbaar, dan is de functie* $f(P)$ *meetbaar.*

Uit het gegevene volgt in de eerste plaats, dat de puntverzameling A, waarop de functie gedefiniëerd is, meetbaar is. Immers, neemt men $\gamma = -\infty$, $\delta = +\infty$, dan vindt men als verzameling der punten, waarvoor $\gamma \leqq f(P) \leqq \delta$, de geheele puntverzameling A.

Verder volgt uit het gegevene, dat de verzameling der punten, waarvoor $\gamma < f(P) \leqq \delta$, meetbaar is. Beschouwen wij n.l. een rij van *positieve* getallen ε_k, $(k = 1, 2, \ldots\ldots)$, welke 0 tot limiet heeft, dan is de beschouwde puntverzameling de vereeniging van de aftelbaar vele puntverzamelingen, waarvoor telkens $\gamma + \varepsilon_k \leqq f(P) \leqq \delta$.

Analoog bewijst men, dat de verzamelingen der punten, waarvoor $\gamma \leqq f(P) < \delta$, of waarvoor $\gamma < f(P) < \delta$, meetbaar zijn.

Wij definiëeren nu eerst de functie $f(P)$ in elk punt der ruimte R_n door haar in ieder punt, dat nièt tot de puntverzameling A behoort, de waarde 0 toe te kennen. Is de aldus verkregen functie meetbaar, dan zal dit volgens de vorige § ook gelden, indien men haar alleen op de puntverzameling A beschouwt.

Wij beschouwen nu eerst het geval, dat de functie $f(P)$ **begrensd** is, d. w. z., dat de waarden der functie een begrensde getallenverzameling vormen. Laten g en G respectievelijk de onderste en de bovenste grens dezer getallenverzameling zijn. Wij beschouwen nu een rij van één-dimensionale netten N_k, waarvan elk een onderverdeeling van alle voorafgaande is, en die alle onderverdeelingen zijn van het interval $g \leqq x \leqq G$, en die verder voldoen aan de onderstellingen, die wij volgens hoofdstuk I steeds omtrent zulk een rij van netten zouden maken. Het k^{de} net wordt dan gedefiniëerd door de getallen:

$$a_{k,0} = g < a_{k,1} < \ldots\ldots < a_{k,p} < \ldots\ldots < G.$$

Zij $A_{k,p}$ de verzameling der punten P, welke voldoen aan de betrekking:

$a_{k,p} \leqq f(P) < a_{k,p+1}$ en zij A_G de verzameling der punten, waar $f(P) = G$. Volgens het zooeven bewezene zijn deze puntverzamelingen $A_{k,p}$ en A_G allen meetbaar.

Wij definiëeren nu voor elke index k een functie $f_k(P)$. Deze functie geven wij in de punten eener puntverzameling $A_{k,p}$ de waarde $a_{k,p}$, en in de punten van A_G de waarde G. Zulk een functie $f_k(P)$ is een *karakteristieke som*, daar zij slechts een eindig aantal waarden aanneemt; zij is *meetbaar*, daar de puntverzamelingen, waarop zij haar verschillende waarden aanneemt, alle meetbaar zijn.

Is P een punt eener puntverzameling $A_{k,p}$, dan heeft men blijkbaar:

$$|f_k(P) - f(P)| \leqq a_{k,p+1} - a_{k,p}.$$

Daar bij toename van de index k het grootste der verschillen $a_{k,p+1} - a_{k,p}$ tot nul nadert, ziet men, dat in elk punt P de getallen $f_k(P)$ het getal $f(P)$ tot limiet hebben. De functie $f(P)$ is dus de limiet van een convergente rij meetbare functies $f_k(P)$; volgens § 91 is zij dus ook meetbaar.

Thans beschouwen wij het geval, dat de functie $f(P)$ *niet* begrensd is. Zij r een natuurlijk getal. Wij definiëeren nu een functie $\varphi(P)$ door de volgende definities:

$$\phi(P) = f(P), \text{ wanneer } |f(P)| < r,$$
$$\phi(P) = r, \text{ wanneer } f(P) \geqq r;$$
$$\phi(P) = -r, \text{ wanneer } f(P) \leqq -r.$$

Deze functie $\phi(P)$ is nu begrensd, terwijl men uit hetgeen omtrent de functie $f(P)$ ondersteld werd zonder moeite aantoont, dat voor ieder paar getallen γ en δ ook de verzameling der punten, waarvoor $\gamma \leqq \phi(P) \leqq \delta$, meetbaar is. Hieruit volgt volgens het boven bewezene de meetbaarheid van $\phi(P)$. Laat men nu r de rij der natuurlijke getallen doorloopen, dan krijgt men een rij van functies $\phi(P)$, welker waarden in ieder punt naar die van $f(P)$ convergeeren. De functie $f(P)$ is dus meetbaar als limiet van een convergente rij meetbare functies.

§ **98.** Met behulp van de uitkomsten der vorige § zullen wij nu een reeks stellingen afleiden, die te zamen met de stellingen van § 91 den lezer in staat zullen stellen, gemakkelijk te bewijzen, dat alle functies, die hij uit de elementaire analyse kent, meetbaar zijn.

In hoofdstuk I, § 24, hebben wij de volgende definitie gegeven:

Een functie $f(P)$ heet **continu** in een punt P, indien voldaan wordt aan de beide volgende voorwaarden:

1. De waarde van de functie in P is eindig.
2. Bij ieder positief getal ε bestaat er een interval, dat P tot inwendig punt heeft en de eigenschap bezit, dat voor ieder punt van het interval, dat tot A behoort, de waarde der functie minder dan ε van de waarde in P verschilt.

Is een functie continu in ieder punt van een puntverzameling A, dan heet zij *continu op* A.

Zij nu een functie $f(P)$ gedefiniëerd en continu op een meetbare puntverzameling A en laten γ en δ twee reëele getallen zijn. Zij P_0 een punt van A, waarvoor $\gamma < f(P_0) < \delta$. Neemt men nu in de boven gegeven definitie het getal ε gelijk aan het kleinste der beide getallen $f(P_0) - \gamma$ en $\delta - f(P_0)$, dan ziet men, dat er een open interval bestaat, dat P_0 bevat en de eigenschap heeft, dat in elk punt van de doorsnede van dit interval met A de functiewaarde eveneens tusschen γ en δ ligt. De open intervallen, die bij de verschillende punten P_0 behooren, vormen een open puntverzameling. Hieruit volgt, dat de verzameling van alle punten van A, waarvoor de functiewaarden tusschen γ en δ liggen, de doorsnede is van A met een meetbare puntverzameling en dus meetbaar.

Beschouwen wij nu de verzamelingen der punten van A, waarvoor $\gamma \leqq f(P) \leqq \delta$, terwijl γ en δ eindig zijn. Deze ver-

zameling is de doorsnede van de puntverzamelingen, waardoor $\gamma - \varepsilon_k < f(P) < \delta + \varepsilon_k$, waarin de getallen ε_k $(k = 1, 2, \ldots)$ een rij van *positieve* getallen vormen, die 0 tot limiet heeft. Hieruit volgt de meetbaarheid der genoemde puntverzameling.

Het laatste blijft gelden, als één of beide der getallen γ en δ de waarde $-\infty$ of $+\infty$ bezit. Men ziet dit gemakkelijk, als men bedenkt, dat wegens de continuïteit van $f(P)$ de puntverzamelingen, waarvoor $f(P) = +\infty$, en waarvoor $f(P) = -\infty$, beide leeg zijn.

Aan de voorwaarde der vorige § is dus voldaan, en men heeft de

Stelling. *Een functie, die op een meetbare puntverzameling gedefiniëerd en continu is, is meetbaar.*

§ **99**. **Stelling**. *Laten aftelbaar vele puntverzamelingen A_k $(k = 1, 2, \ldots)$ gegeven zijn, die 2 aan 2 geen enkel punt gemeen hebben; en laat op elke puntverzameling A_k een meetbare functie $f_k(P)$ gedefiniëerd zijn. Zij A de som der verzamelingen A_k en zij $f(P)$ een functie, die op A gedefiniëerd is, en welker waarde in elk punt van de puntverzameling A_k gelijk is aan de waarde van $f_k(P)$ in dat punt. Dan is deze functie $f(P)$ meetbaar.*

De puntverzameling A is n.l. meetbaar als som van aftelbaar vele, meetbare puntverzamelingen. En de ordinaatverzameling van $f(P)$ is de som van de ordinaatverzamelingen der functies $f_k(P)$, en dus eveneens meetbaar.

Stelling. *Een functie, die op een puntverzameling van de maat 0 gedefiniëerd is, is steeds meetbaar.*

Zij A de puntverzameling van de maat 0, waarop de functie $f(P)$ gedefiniëerd is; dan is A zeker meetbaar. De ordinaatverzameling van $f_+(P)$ is een deel van een cylinder, die A tot basis heeft, en waarvoor $h = +\infty$. Deze cylinder is de limiet van een rij cylinders, die A tot basis hebben, en waarvan de hoogte telkens gelijk is aan een natuurlijk getal r.

Volgens § 76 heeft elk van deze cylinders de $(n+1)$-maat 0, en volgens § 60 van hoofdstuk III geldt hetzelfde voor haar limiet. De ordinaatverzameling van $f_+(P)$ heeft dus ook de $(n+1)$-maat 0 en is dus meetbaar. Analoog bewijst men de meetbaarheid van de ordinaatverzameling van $f_-(P)$, waaruit het gestelde volgt.

Een gevolg van de beide laatste stellingen is de

Stelling: *Een functie, die gedefiniëerd is op een meetbare puntverzameling, en welker discontinuïteitspunten een verzameling vormen van de maat 0, is meetbaar.*

Zij A de puntverzameling, waarop de functie gedefiniëerd is,

B de verzameling der discontinuïteitspunten. Op de meetbare puntverzameling $A - B$ is de functie continu en dus meetbaar. Zij is ook meetbaar op de puntverzameling B, daar deze de maat 0 heeft. Volgens de eerste stelling van deze § is zij dus ook meetbaar op de puntverzameling $(A - B) + B = A$.

§ **100.** Wij zullen enkele voorbeelden geven van functies, waarop wij de laatste stellingen zullen toepassen.

a. Wij definiëeren op het open, één-dimensionale interval $0 < x < 1$ een functie $f(x)$ door de volgende definities:

$f(x) = 0$, wanneer x onmeetbaar is.

$f(x) = \frac{1}{q}$, wanneer x gelijk is aan een onvereenvoudigbare breuk $\frac{p}{q}$.

Deze functie is continu voor elke onmeetbare, discontinu voor elke meetbare waarde van x. Zij is dus meetbaar, daar haar discontinuïteitspunten een puntverzameling van de maat 0 vormen.

b. Wij definiëeren weer op het interval $0 < x < 1$ een functie door de definities:

$f(x) = 0$, wanneer x onmeetbaar is.

$f(x) = 1$, wanneer x meetbaar is.

Deze functie is discontinu in ieder punt van het interval. Beschouwt men haar echter alleen op de verzameling A der onmeetbare waarden van x, dan is zij op deze meetbare puntverzameling constant, dus meetbaar. De verzameling B der meetbare waarden van x heeft de maat 0. Hieruit volgt de meetbaarheid der functie.

c. Wij definiëeren weer een functie $f(x)$ op het interval $0 < x < 1$. Om voor een getal x van dit interval de functie te definiëeren, ontwikkelen wij x in een oneindig voortloopende, decimale breuk. Is deze ontwikkeling niet volkomen bepaald, doordat zij vanaf een zeker oogenblik òf uitsluitend nullen òf uitsluitend negens zou moeten bevatten, dan kiezen wij de ontwikkeling, die vanaf een zeker oogenblik uitsluitend negens bevat. Wij beschouwen nu de rij cijfers, die gevormd wordt door de eerste, derde, vijfde, ... decimaal, dus in het algemeen door de decimalen met oneven rangnummer. Er zijn nu 2 mogelijkheden:

1^0. Deze decimalen van oneven rangnummer zijn vanaf een zeker oogenblik allen 0. Zij $2k + 1$ het rangnummer van de eerste, die niet meer door een van 0 verschillende gevolgd wordt. In dit geval nemen wij als waarde van de functie in het beschouwde punt de, tusschen 0 en 1 gelegen, decimale breuk, die

men verkrijgt door achter de komma naast elkander te schrijven de decimalen van x met even rangnummer, te beginnen met die met het rangnummer $2k + 2$.

2⁰. Het gebeurt niet, dat van een zeker oogenblik af alle decimalen met oneven rangnummer 0 zijn. In dit geval geven wij de functie de waarde 0.

Deze functie heeft de eigenaardigheid, dat zij *elke* waarde tusschen 0 en 1 in *ieder* deelinterval van haar definitiegebied minstens éénmaal (en dus oneindig vele malen), aanneemt. De lezer overtuige zich hiervan.

Om de meetbaarheid dezer functie te bewijzen, splitsen wij het definitiegebied in de volgende puntverzamelingen:

1⁰. de verzameling A_1 der getallen x, waarvan alle decimalen met oneven rangnummer 0 zijn.

2⁰. De verzameling A_2 der getallen x, waarvan alle decimalen met oneven rangnummer 0 zijn vanaf de derde decimaal, terwijl de eerste niet 0 is.

3⁰. De verzameling A_3 der getallen x, waarvan de decimalen met oneven rangnummer 0 zijn vanaf de vijfde, terwijl de derde decimaal niet 0 is, enz.

De puntverzameling A_k bestaat dus uit de getallen x, waarvan alle decimalen met oneven rangnummer 0 zijn vanaf die met het rangnummer $2k - 1$, terwijl die met het rangnummer $2k - 3$ niet 0 is. Ten slotte zij B de verzameling der punten van het interval $0 < x < 1$, die tot geen der puntverzamelingen A_k behooren.

De puntverzameling A_k is nu de doorsnede van de volgende puntverzamelingen:

1⁰. De verzameling der getallen x, waarvan de $(2k - 3)$-de decimaal *niet* 0 is.

2⁰. De verzameling der getallen x, waarvoor de $(2k - 1)$-de decimaal $= 0$ is.

3⁰. De verzameling der getallen x, waarvoor de $(2k + 1)$-de decimaal $= 0$ is, enz.

Elk van deze puntverzamelingen nu is de som van een eindig aantal intervallen, (waarvan men een der eindpunten weggelaten heeft); zij is dus ook meetbaar. Elk der puntverzamelingen A_k is dus ook meetbaar, en hetzelfde geldt voor B.

Op elk dezer puntverzamelingen A_k nu is de functie $f(x)$ continu. Men ziet dit onmiddellijk in, als men bedenkt, dat twee getallen x, die tot eenzelfde puntverzameling A_k behooren, en zeer weinig van elkander verschillen, in een groot aantal decimalen overeen zullen stemmen, zoodat ook de bijbehoorende functiewaarden weinig verschillen, (de lezer formuleere dit beter

en scherper). Op elk dezer puntverzamelingen is de functie dus meetbaar, terwijl zij op B constant is. Hieruit volgt de meetbaarheid der functie in het geheele interval.

§ **101. Stelling.** *De som van 2 meetbare functies is weer een meetbare functie.*

Zij A de puntverzameling, waarop de beide functies gedefiniëerd zijn. Zooals in § 81 opgemerkt werd, is de som der beide functies gedefiniëerd op de verzameling A' der punten van A, waar niet één der beide functies de waarde $+\infty$ en tegelijk de andere de waarde $-\infty$ bezit.

Wij beschouwen ten eerste het geval, dat beide functies begrensd zijn; laten $f(P)$ en $F(P)$ deze functies zijn. Zooals in § 97 gebleken is, kan men de functie $f(P)$ verkrijgen als limiet van een rij meetbare karakteristieke sommen $f_k(P)$, de functie $F(P)$ als limiet van een rij meetbare karakteristieke sommen $F_k(P)$. Voor elke waarde van k is dan de functie $f_k(P)+F_k(P)$ weer een meetbare, karakteristieke som. De limiet van de rij der functies $f_k(P)+F_k(P)$ is de functie $f(P)+F(P)$, welke dus meetbaar is.

Zijn de twee functies niet begrensd, dan kan men volgens § 97 hen elk verkrijgen als limiet van een rij meetbare, begrensde functies. Door de functies uit deze twee rijen, die dezelfde index hebben, bij elkander op te tellen, verkrijgt men weer een rij meetbare, begrensde functies, waarvan de limiet in ieder punt der verzameling A' de functie $f(P)+F(P)$ is. Hiermede is de meetbaarheid dezer laatste functie bewezen.

Door volledige inductie vindt men, dat *de som van een eindig aantal meetbare functies weer een meetbare functie is.* Combineert men deze stelling met die van § 91, dan vindt men, *dat de som van een convergente reeks, waarvan de termen meetbare functies zijn, weer een meetbare functie is.*

Stelling. *Het product van 2 meetbare functies is weer een meetbare functie.*

Dit product is natuurlijk gedefiniëerd op de verzameling der punten, waar niet de eene functie de waarde 0 en tegelijk de andere de waarde $+\infty$ of $-\infty$ aanneemt. Het bewijs dezer stelling is geheel analoog aan dat der vorige, zoodat wij het aan den lezer kunnen overlaten.

§ **102. Stelling.** *Is $f(P)$ een meetbare functie, dan is $\frac{1}{f(P)}$ ook een meetbare functie.*

Deze functie $\frac{1}{f(P)}$ is gedefiniëerd op de verzameling A' der punten, waar $f(P)$ niet de waarde 0 aanneemt.

Wij beschouwen afzonderlijk de beide functies $f_+(P)$ en $f_-(P)$.

Zij A'_+ de verzameling der punten, waar $f_+(P) > 0$, A'_- de verzameling der punten, waar $f_-(P) < 0$. Is nu $F(P) = \frac{1}{f(P)}$, dan is op $A'_+ : F(P) = \frac{1}{f_+(P)}$, op $A'_- : F(P) = \frac{1}{f_-(P)}$. Is de meetbaarheid van $F(P)$ op elk der beide puntverzamelingen A'_+ en A'_- bewezen, dan volgt hieruit de meetbaarheid op de geheele puntverzameling A'.

Zij r een natuurlijk getal. Op A'_+ definiëeren wij nu een functie $\phi(P)$ door de volgende definities:

$\phi(P) = \frac{1}{r}$, wanneer $f_+(P) < \frac{1}{r}$.

$\phi(P) = f_+(P)$, wanneer $\frac{1}{r} \leqq f_+(P) \leqq r$.

$\phi(P) = r$, wanneer $f_+(P) > r$.

Deze functie $\phi(P)$ is begrensd, haar meetbaarheid volgt uit die van $f_+(P)$, daar men gemakkelijk aantoont, dat zij aan de voorwaarde van § 97 voldoet. Men kan $\phi(P)$ dus verkrijgen als limiet van een rij karakteristieke sommen $\phi_k(P)$. Elk dezer functies $\phi_k(P)$ neemt een eindig aantal waarden aan, die tot het interval $\frac{1}{r} \leqq x \leqq r$ behooren.

Uit dit laatste volgt, dat elk der functies $\frac{1}{\phi_k(P)}$ ook slechts een eindig aantal eindige waarden aanneemt. De puntverzamelingen, waarop deze waarden worden aangenomen, zijn dezelfde, waarop de bijbehoorende functie $\phi_k(P)$ haar verschillende waarden aanneemt, en dus meetbaar.

Elk der functies $\frac{1}{\phi_k(P)}$ is dus een meetbare, karakteristieke som. De limiet van de rij dezer functies is de functie $\frac{1}{\phi(P)}$, welke dus eveneens meetbaar is.

Laat men nu r de rij der natuurlijke getallen doorloopen, dan verkrijgt men een rij van functies $\frac{1}{\phi(P)}$. De limiet van deze rij is de functie $\frac{1}{f_+(P)}$, welke op $A'_+ = F(P)$. De functie $F(P)$ is dus meetbaar op A'_+.

Op analoge wijze toont men aan, dat $F(P)$ meetbaar is op A'_-. Hiermede is de stelling bewezen.

Combineert men deze stelling met de laatste der vorige §, dan krijgt men de

Stelling. *Het quotiënt van 2 meetbare functies is weer een meetbare functie.*

HOOFDSTUK V.

Bepaalde Integralen.

§ **103**. Voor de ontwikkelingen van dit hoofdstuk hebben wij enkele stellingen noodig uit hoofdstuk III. Wij zullen de voornaamste hier opnoemen:

I. *De maat van de som van aftelbaar vele, meetbare puntverzamelingen is de som van de maten dier verzamelingen* (§ 59).

II. *Is een rij van meetbare puntverzamelingen gegeven, waarvan ieder een deel van alle volgende is, dan is de maat van de limiet gelijk aan de limiet van de maten dier verzamelingen* (§ 60.

III. *Is een convergente rij van meetbare puntverzamelingen gegeven, welker vereeniging een eindige maat heeft, dan is de maat van de limiet gelijk aan de limiet van de maten dier verzamelingen* (§ 62).

IV. *Is een convergente rij van meetbare puntverzamelingen A_k gegeven, en kan men bij elk positief getal ε een meetbare puntverzameling U vinden van eindige maat, zoodanig, dat voor elke waarde van k:*

$$m(A_k - UA_k) < \varepsilon,$$

dan is de maat van de limiet gelijk aan de limiet van de maten der verzamelingen (§ 63).

§ **104**. Zij op een puntverzameling A een meetbare functie $f(P)$ gegeven. Zij Ω_+ de ordinaatverzameling der functie $f_+(P)$, Ω_- de ordinaatverzameling van $f_-(P)$. Laten $m\Omega_+$ en $m\Omega_-$ de maten dezer ordinaatverzamelingen zijn. *Zijn deze maten niet beide* $+\infty$, dan stellen wij

$$m\Omega_+ - m\Omega_- = \int_A f(P)\,dV$$

en noemen deze uitdrukking de **integraal** der *functie $f(P)$ over de puntverzameling A.* Heeft deze integraal een eindige waarde, zoodat de maten $m\Omega_+$ en $m\Omega_-$ beide eindig zijn, dan noemen wij de functie **sommeerbaar** *over* (*of op*) *de puntverzameling A.* Is $m\Omega_+ = m\Omega_- = +\infty$, dan bestaat de integraal van $f(P)$ over

A dus *niet*. (In tegenstelling met de „onbepaalde integraal”, die in het volgende hoofdstuk gedefiniëerd zal worden, noemen wij de hier gedefiniëerde integraal een *bepaalde* integraal).

Beschouwen wij in plaats van de functie $f(P)$ de functie $f_+(P)$, dan is voor *deze* functie de ordinaatverzameling Ω_+ dezelfde als voor $f(P)$, terwijl de ordinaatverzameling Ω_- der functie $f_+(P)$ de maat nul heeft. Men heeft dus:

$$\int_A f_+(P)\,dV = m\Omega_+.$$

Evenzoo heeft men:

$$\int_A f_-(P)\,dV = -\,m\Omega_-.$$

Voor het bestaan van de integraal van $f(P)$ over A is noodzakelijk en voldoende, dat één dezer beide waarden eindig is. Men heeft dus de

Stelling: *Indien de integraal eener functie $f(P)$ over een puntverzameling A bestaat, is van de functies $f_+(P)$ en $f_-(P)$ minstens één over A sommeerbaar; en omgekeerd. Is $f(P)$ sommeerbaar over A, dan zijn $f_+(P)$ en $f_-(P)$ dat beide; en omgekeerd.*

Nog een opmerking: Wij zullen in dit hoofdstuk, (tenzij het tegendeel uitdrukkelijk vermeld wordt) de puntverzamelingen, waarop functies gedefiniëerd zijn, beschouwen als deelverzamelingen eener ruimte R_n; de ordinaatverzamelingen zijn dan dus deelverzamelingen eener R_{n+1}. Door het teeken m zullen wij voor puntverzamelingen van de eerste soort de n-maat, voor ordinaatverzamelingen de $(n+1)$-maat aanduiden.

§ **105. Stelling.** *Heeft een functie $f(P)$ op een meetbare n-dimensionale puntverzameling A een constante waarde c, dan is de integraal dezer functie over A gelijk aan cmA.*

Zij ten eerste c positief. De ordinaatverzameling Ω_+ is nu een $(n+1)$-dimensionale cylinder, die A tot basis en de hoogte c heeft; haar maat is dus cmA. De ordinaatverzameling Ω_- bestaat alleen uit de puntverzameling A en heeft dus de $(n+1)$-maat 0. Hieruit volgt de stelling.

Analoog bewijst men de stelling voor het geval, dat c 0 of negatief is. Is $c = 0$, $mA = +\infty$, dan vindt men, dat de integraal de waarde 0 heeft.

Stelling. *Is in geen enkel punt van de puntverzameling A de waarde der functie $f(P)$ kleiner dan een gegeven getal α, dan is de integraal dezer functie over A niet kleiner dan αmA.*

Zij ten eerste α positief. Dan is in elk punt van A $f_+(P) = f(P) \geqq \alpha$, $f_-(P) = 0$. De cylinder, die A tot basis en α tot

hoogte heeft, is nu een deel van de ordinaatverzameling Ω_+, zoodat $\alpha mA \leqq m\Omega_+$. Verder is $m\Omega_- = 0$, waaruit de stelling volgt. Zij ten tweede $\alpha = 0$. Nu is $m\Omega_+ \geqq 0$, $\alpha mA = 0$, (indien mA eindig is), $m\Omega_- = 0$. De stelling heeft nu alleen zin, indien mA eindig is, en is in dit geval direct duidelijk. Is $mA = +\infty$, dan volgt uit $m\Omega_- = 0$ in elk geval, dat de integraal niet negatief is.

Zij ten slotte α negatief. Dan is steeds $f(P) \geqq f_-(P) \geqq \alpha$. De ordinaatverzameling van $f_-(P)$ is nu een deel van een $(n+1)$-dimensionalen cylinder, die A tot basis heeft, terwijl $h = \alpha$. Men heeft dus:

$$m\Omega_- \leqq |\,\alpha\,| \,.\, mA.$$

$$-\, m\Omega_- \geqq \alpha mA.$$

$$m\Omega_+ - m\Omega_- \geqq \alpha mA,$$

wat te bewijzen was.

Analoog bewijst men de

Stelling. *Is in geen enkel punt van de puntverzameling A de waarde der functie $f(P)$ grooter dan een gegeven getal α, dan is de integraal dezer functie over A niet grooter dan αmA.*

§ **106**. **Stelling.** *Op een puntverzameling van de maat 0 is elke functie sommeerbaar, terwijl haar integraal over die puntverzameling de waarde 0 heeft.*

Zij $mA = 0$. De ordinaatverzameling Ω_+ is een deel van een $(n+1)$-dimensionalen cylinder, die A tot basis heeft, terwijl $h = +\infty$. Zooals wij in § 99 gezien hebben, heeft zulk een cylinder de maat 0, indien haar basis de n-maat 0 heeft. Dus is ook $m\Omega_+ = 0$. Evenzoo toont men aan, dat $m\Omega_- = 0$ is, waaruit de stelling volgt.

Stelling. *Op een meetbare puntverzameling A van eindige maat is elke begrensde, meetbare functie sommeerbaar.*

Laten g en G de onderste en bovenste grens van de functie $f(P)$ zijn. Is G positief, dan is $f_+(P) \leqq G$, dus, zooals in de vorige § gebleken is, $m\Omega_+ \leqq GmA$; is $G \leqq 0$, dan is $m\Omega_+ = 0$. Evenzoo bewijst men de eindigheid van $m\Omega_-$, waaruit de stelling volgt.

Stelling. *Is een functie $f(P)$ sommeerbaar over een puntverzameling A, dan heeft de verzameling der punten van A, waar $f(P) = +\infty$, de maat 0; evenzoo die der punten, waar $f(P) = -\infty$.*

Zij B de verzameling der punten van A, waar $f(P) = +\infty$. Was nu de maat van B positief, dan zouden de ordinaten, die bij de punten van B behooren, een $(n+1)$-dimensionalen cylinder

vormen, welks basis een positieve n-maat had, terwijl $h = +\infty$. De $(n+1)$-maat van zulk een cylinder is $+\infty$. Deze cylinder is echter een deel van Ω_+, dus zou ook $m\Omega_+ = +\infty$ zijn, hetgeen met de sommeerbaarheid van $f(P)$ in strijd is.

Analoog bewijst men het tweede deel der stelling. Combineert men deze stelling met die van § 104, dan vindt men de

Stelling: *Indien de integraal eener functie $f(P)$ over een puntverzameling A bestaat, heeft òf de verzameling der punten van A, waar $f(P) = +\infty$, òf die der punten van A, waar $f(P) = -\infty$, de maat 0.*

§ **107. Stelling.** *Indien de integraal eener functie $f_+(P)$ over een puntverzameling A de waarde 0 heeft, heeft de verzameling der punten van A, waar $f_+(P)$ positief is, de maat* 0.

Beschouwen wij een monotoon afdalende rij van positieve getallen ε_k $(k = 1, 2, \ldots .)$, welke nul tot limiet heeft. Zij B_k de verzameling der punten van A, waar $f_+(P) \geqq \varepsilon_k$. Van deze puntverzameling B_k is thans elk een deel van alle volgende, terwijl hun vereeniging B de verzameling is van alle punten, waar $f_+(P)$ positief is. Hebben al deze puntverzamelingen B_k de maat 0, dan geldt hetzelfde voor B.

Was dus de maat van B positief, dan zou voor een zekere waarde van k ook $mB_k > 0$ moeten zijn. Nu is de $(n+1)$-dimensionale cylinder, welke B_k tot basis en ε_k tot hoogte heeft, een deel van de ordinaatverzameling Ω_+ van $f_+(P)$, omdat in de punten van $B_k : f_+(P) \geqq \varepsilon_k$. Was nu $mB_k > 0$, dan zou die cylinder een positieve $(n+1)$-maat hebben, en was dus ook $m\Omega_+ > 0$. Daar $f_+(P)$ niet negatief is, is $m\Omega_- = 0$ voor deze functie. De integraal van $f_+(P)$ zou dan dus positief zijn, in strijd met het gegevene,

Naar aanleiding van dit bewijs kunnen wij tevens de stelling uitspreken:

Stelling. *Is op een puntverzameling A een meetbare functie $f_+(P)$ gegeven, en is voor de verzameling B der punten van A, waar $f_+(P) \geqq \varepsilon > 0$: $mB \geqq \alpha$, dan is $\int_A f_+(P)\, dV \geqq \varepsilon\alpha$.*

Immers, de $(n+1)$-dimensionale cylinder die B tot basis, en ε tot hoogte heeft, is een deel van de ordinaatverzameling Ω_+.

§ **108. Stelling.** *Zijn op een puntverzameling A 2 meetbare functies $f(P)$ en $\phi(P)$ gegeven en is in ieder punt van A: $f(P) \leqq \phi(P)$, dan is $\int_A f(P)\, dV \leqq \int_A \phi(P)\, dV$.*

Is n.l. $f(P) \leqq \phi(P)$, dan is ook $f_+(P) \leqq \phi_+(P)$ en $f_-(P) \leqq \phi_-(P)$.

De ordinaatverzameling Ω_+ van $f_+(P)$ is dus een deel van de ordinaatverzameling Ω'_+ van $\varphi_+(P)$, en de ordinaatverzameling Ω_- van $f_-(P)$ bevat de ordinaatverzameling Ω'_- van $\varphi_-(P)$. Men heeft dus:

$$m\Omega_+ \leqq m\Omega'_+.$$

$$m\Omega_- \geqq m\Omega'_-.$$

Trekt men deze 2 vergelijkingen van elkander af, dan vindt men de te bewijzen stelling.

§ 109. **Stelling.** *Is een functie $f(P)$ sommeerbaar over een puntverzameling A, en is voor een tweede functie $\varphi(P)$ in ieder punt van A: $|\varphi(P)| \leqq |f(P)|$, dan is ook $\varphi(P)$ sommeerbaar over A.*

Wij splitsen de puntverzameling A in 5 deelverzamelingen B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, op de volgende wijze:

Op B_1 is $f(P) > 0$, $\varphi(P) \geqq 0$.
Op B_2 is $f(P) > 0$, $\varphi(P) < 0$.
Op B_3 is $f(P) < 0$, $\varphi(P) \geqq 0$.
Op B_4 is $f(P) < 0$, $\varphi(P) < 0$.
Op B_5 is $f(P) = 0$, dus ook $\varphi(P) = 0$.

Zij $\Omega(B_k)$ de verzameling der ordinaten van $f(P)$ in de punten van de puntverzameling B_k, en laat $\Omega'(B_k)$ de overeenkomstige beteekenis hebben voor de functie $\varphi(P)$.

Uit de sommeerbaarheid van $f(P)$ volgt nu, dat elk der puntverzamelingen $\Omega(B_k)$ een eindige maat heeft; elk van hen toch is òf een deel van Ω_+ òf van Ω_-.

Nu is $\Omega'(B_1)$ een deel van $\Omega(B_1)$ en $\Omega'(B_4)$ een deel van $\Omega(B_4)$. Verder gaat door de transformatie:

$$\bar{x}_p = x_p \quad (p = 1, 2, \ldots . n)$$

$$\bar{x}_{n+1} = - x_{n+1}$$

de puntverzameling $\Omega'(B_2)$ over in een deelverzameling van $\Omega(B_2)$, en evenzoo $\Omega'(B_3)$ in een deel van $\Omega(B_3)$. Ten slotte heeft $\Omega'(B_5)$ de maat 0.

Uit dit alles volgt, dat elk der puntverzamelingen $\Omega'(B_k)$ een eindige maat heeft. De geheele ordinaatverzameling der functie $\varphi(P)$ heeft dus een eindige maat, waaruit de sommeerbaarheid volgt.

In het bijzonder kan men voor $\varphi(P)$ nemen de functie $|f(P)|$; men vindt dan:

Stelling. *Is een functie $f(P)$ sommeerbaar over een puntverzameling A, dan geldt hetzelfde voor $|f(P)|$. Is omgekeerd $|f(P)|$ sommeerbaar, dan geldt hetzelfde voor $f(P)$.*

§ 110. **Stelling.** *Een functie, die sommeerbaar is over een puntverzameling A, is sommeerbaar over elke meetbare deelverzameling van A.*

Zij B een meetbare deelverzameling van A. De functie $f(P)$ is dan in elk geval meetbaar op B. Verder is de verzameling der ordinaten van $f(P)$ in de punten van B een deel van de verzameling der ordinaten van $f(P)$ in de punten van A. Uit de eindigheid van de maat dezer laatste ordinaatverzameling volgt dus de eindigheid van de maat der eerste, en hieruit de te bewijzen sommeerbaarheid.

Combineert men deze stelling met die van § 104, dan vindt men de

Stelling. *Bestaat de integraal eener functie $f(P)$ over een puntverzameling A, dan bestaat zij ook over elke meetbare deelverzameling van A.*

§ 111. **Stelling.** *Is op een puntverzameling A een meetbare functie $f(P)$ gegeven, dan is* $\left| \int_A f(P)\, dV \right| \leqq \int_A |f(P)|\, dV$.

Zij A_1 de verzameling der punten van A, waar $f(P) \geqq 0$ en A_2 de verzameling der punten van A, waar $f(P) < 0$. De verzameling der ordinaten van $f(P)$ in de punten van A_1 is tevens de verzameling der ordinaten van $|f(P)|$; en de verzameling der ordinaten van $f(P)$ in de punten van A_2 gaat door de transformatie:

$$\bar{x}_p = x_p \quad (p = 1, 2, \ldots . n)$$
$$\bar{x}_{n+1} = -x_{n+1}$$

over in de verzameling der ordinaten van $|f(P)|$ in de punten van A_2. Om nu de integraal van $f(P)$ te vinden, moet men de maten dezer beide ordinaatverzamelingen van elkander aftrekken, en, om de integraal van $|f(P)|$ te vinden, moet men ze bij elkander optellen. Hieruit volgt de stelling.

§ 112. **Stelling.** *Zij een functie $f(P)$ meetbaar op een puntverzameling A, welke de som is van 2 meetbare puntverzamelingen B en C. Indien de integraal van $f(P)$ over A bestaat, bestaan ook de integralen over B en C en is de eerstgenoemde integraal de som der beide andere.*

Laten $\Omega_+(A)$, $\Omega_+(B)$ en $\Omega_+(C)$ de ordinaatverzamelingen van $f_+(P)$ zijn, die bij de puntverzamelingen A, B en C behooren; en laten $\Omega_-(A)$, $\Omega_-(B)$ en $\Omega_-(C)$ de overeenkomstige ordinaatverzamelingen van $f_-(P)$ zijn. Uit het bestaan van $\int_A f(P)\, dV$ volgt, dat $m\Omega_+(A)$ en $m\Omega_-(A)$ niet beide $+\infty$ zijn. Is bijv.

$m\Omega_-(A)$ eindig, dan volgt hieruit de eindigheid van $m\Omega_-(B)$ en $m\Omega_-(C)$, en hieruit het bestaan van de integralen over B en C.

Verder heeft men:

$$m\Omega_+(A) = m\Omega_+(B) + m\Omega_+(C)$$
$$m\Omega_-(A) = m\Omega_-(B) + m\Omega_-(C).$$

Trekt men deze vergelijkingen van elkander af, dan vindt men (bij de genoemde onderstelling) het tweede deel der stelling. De vraag rijst, in hoever omgekeerd uit het bestaan der integralen over B en C dat der integraal over A volgt. Men ziet gemakkelijk, dat dit het geval is, tenzij één dezer integralen de waarde $+\infty$, de andere de waarde $-\infty$ heeft. Is bijv. geen der beide integralen $= -\infty$, dan moeten $m\Omega_-(B)$ en $m\Omega_-(C)$ beide eindig zijn; hieruit volgt de eindigheid van $m\Omega_-(A)$, dus het bestaan der integraal over A.

Is in het bijzonder $f(P)$ sommeerbaar over B en C, dan is zij ook sommeerbaar over A.

Door volledige inductie vindt men de overeenkomstige stellingen voor een som van een eindig aantal puntverzamelingen.

§ 113. **Stelling.** *Zij een functie $f(P)$ meetbaar op een puntverzameling A, die de som is van aftelbaar vele meetbare puntverzamelingen A_k $(k = 1, 2 \, . \, .)$. Indien de integraal van $f(P)$ bestaat over A, bestaan ook de integralen over de puntverzamelingen A_k, en men heeft:*

$$\int_A f(P)\,dV = \lim_{l=\infty} \sum_1^l \int_{A_k} f(P)\,dV.$$

Men kan dit laatste ook zóó uitdrukken, dat de integraal over A de som is van de oneindig voortloopende reeks, door de integralen over de puntverzameling A_k gevormd, indien men als som van een oneindig voortloopende reeks ook de getallen $+\infty$ en $-\infty$ toelaat.

Om het eerste deel der stelling te bewijzen, merken wij op, dat uit het bestaan der integraal over A volgt, dat de getallen $m\Omega_+(A)$ en $m\Omega_-(A)$ nièt beide $+\infty$ zijn. Is bijv. $m\Omega_-(A)$ eindig, dan is ook elk der getallen $m\Omega_-(A_k)$ eindig, waaruit het bestaan der afzonderlijke integralen volgt.

Verder is:

$$m\Omega_+(A) = \sum_1^\infty m\Omega_+(A_k)$$

$$m\Omega_-(A) = \sum_1^\infty m\Omega_-(A_k).$$

Trekt men (bij de bovengenoemde onderstelling) deze twee

vergelijkingen van elkander af, dan vindt men het tweede deel der stelling.

Men kan weer vragen, of uit het bestaan der integralen over de puntverzamelingen A_k dat der integraal over A volgt. Men ziet gemakkelijk, dat dit het geval is, indien minstens éen der beide reeksen $\sum_1^\infty m\Omega_+(A_k)$ en $\sum_1^\infty m\Omega_-(A_k)$ convergeert. Convergeeren beide reeksen, dan is $f(P)$ over A *sommeerbaar*. (Wij noemen hier een reeks „convergent'', indien haar som eindig is; voor de convergentie is dus noodzakelijk, dat geen der termen van de reeks de waarde $+\infty$ of $-\infty$ heeft).

De laatste voorwaarde kan men ook zóó uitdrukken:

Stelling. *De functie $f(P)$ is over de puntverzameling $A = \sum_1^\infty A_k$ sommeerbaar, indien de reeks $\sum_1^\infty \int_{A_k} |f(P)|\, dV$ convergeert.*

Immers, zooals in § 111 gebleken is, heeft men:

$$\int_{A_k} |f(P)|\, dV = m\Omega_+(A_k) + m\Omega_-(A_k).$$

§ **114.** Wij zullen in deze § en de volgende enkele gevolgtrekkingen maken uit de resultaten der vorige §.

Stelling. *Is een functie $f(P)$ sommeerbaar over een puntverzameling A, dan kan men bij elk positief getal ε een positief getal N vinden zóódanig, dat $\left|\int_B f(P)\, dV\right| < \varepsilon$, waarbij B de verzameling is der punten van A, die gelegen zijn buiten het interval:*

$$-N \leqq x_p \leqq +N. \quad (p = 1, 2, \ldots . n).$$

Wij beschouwen een monotoon stijgende rij van positieve getallen N_k $(k = 1, 2, \ldots .)$, welke $+\infty$ tot limiet heeft. Zij A_k de verzameling der punten van A, die gelegen zijn buiten het interval:

$$-N_k \leqq x_p \leqq N_k \quad (p = 1, 2, \ldots . n)$$

doch binnen het interval:

$$-N_{k+1} \leqq x_p \leqq +N_{k+1} \quad (p = 1, 2, \ldots . n).$$

Zij A_0 de verzameling der punten van A, die gelegen zijn binnen het interval:

$$-N_1 \leqq x_p \leqq +N_1 \quad (p = 1, 2, \ldots . n).$$

Daar $f(P)$ sommeerbaar is over A, is zij volgens § 110 sommeerbaar over $A - A_0 = \sum_1^\infty A_k$. De integralen van $f(P)$ over de puntverzamelingen A_k vormen dus een convergente reeks. Men

kan dus een index K bepalen zóódanig, dat de som der termen der reeks, welker index $> K$ is, volstrekt genomen kleiner is dan ε. Zij B de som der puntverzamelingen A_k, welker index $> K$ is. Daar B een deel is van A, is de functie over B sommeerbaar en haar integraal over B is de som van de integralen over de genoemde puntverzamelingen A_k, dus $< \varepsilon$. De genoemde stelling geldt dus, indien men voor het getal N het getal N_k neemt.

§ **115. Stelling.** *Is een functie $f(P)$ sommeerbaar over een puntverzameling A, dan kan men bij elk positief getal ε twee positieve getallen N en N_1 vinden zóódanig, dat:*

$$\int_B f(P)\, dV < \varepsilon$$

$$\left| \int_C f(P)\, dV \right| < \varepsilon.$$

Hierin is B de verzameling der punten van A, waar $f(P) \geqq N$, C de verzameling der punten van A, waar $f(P) \leqq -N_1$.

Wij beschouwen eerst de functie $f_+(P)$, welks sommeerbaarheid uit die van $f(P)$ volgt. Zij A_k de verzameling der punten van A, waar $k - 1 \leqq f_+(P) < k$. En zij A_∞ de verzameling der punten van A, waar $f(P) = f_+(P) = +\infty$. Dan is $A - A_\infty = \sum_1^\infty A_k$. Daar $f_+(P)$ sommeerbaar is over A, is deze functie ook sommeerbaar over $A - A_\infty$, en dus ook over elk der puntverzamelingen A_k, terwijl haar integralen over deze laatste puntverzamelingen een convergente reeks vormen. Men kan dus een index K vinden zóódanig, dat de som van de termen dezer reeks, welker index grooter dan K is, kleiner is dan ε. Deze laatste som is nu de integraal van $f(P)$ over de som der puntverzamelingen A_k, waarvan de index grooter dan K is, dat is, over de verzameling der punten van A, waar $K \leqq f(P) < +\infty$.

Volgens § 106 is nu $mA_\infty = 0$, dus de integraal van $f(P)$ over A_∞ gelijk aan nul. Voegt men deze integraal bij de voorgaande dan vindt men, dat de integraal van $f(P)$ over de verzameling der punten van A, waar $K \leqq f(P)$ kleiner is dan ε. De stelling geldt dus, wanneer men $N = K$ stelt.

Op analoge wijze bewijst men door de beschouwing van $f_-(P)$ het tweede deel der stelling.

§ **116.** Met behulp van de uitkomsten der beide laatste §§ bewijzen wij nu de zeer belangrijke

Stelling. *Is een functie $f(P)$ sommeerbaar over een puntver-*

zameling A, dan kan men bij elk positief getal ε een positief getal δ vinden zóódanig, dat voor elke deelverzameling B van A, waarvan de maat $< \delta$, het volgende geldt:

$$\left| \int_B f(P)\, dV \right| < \varepsilon.$$

Zij het positieve getal ε willekeurig gegeven. Volgens de vorige § kan men een postief getal N vinden zoodanig, dat:

$$\int_{C_1} f(P)\, dV < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\left| \int_{C_2} f(P)\, dV \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Hierin is C_1 de verzameling der punten van A, waar $f(P) > N$, C_2 is de verzameling der punten van A, waar $f(P) < -N$. (Men kan n.l. twee getallen N_1 en N_2 vinden, die elk aan één dezer voorwaarden voldoen; men behoeft voor N dan slechts het grootste dezer beide te nemen).

Op de puntverzameling $A - C_1 - C_2$ is $f(P)$ niet grooter dan N en niet kleiner dan $-N$. Is dus B een deel van $A - C_1 - C_2$ zóódanig, dat $mB < \frac{\varepsilon}{3N}$, dan zal volgens § 105 de integraal van $f(P)$ over B tusschen $\frac{-\varepsilon}{3}$ en $\frac{+\varepsilon}{3}$ liggen.

Zij nu B een deelverzameling van A, waarvan de maat kleiner is dan $\frac{\varepsilon}{3N}$. De integralen van $f(P)$ over BC_1 en BC_2 zijn, volstrekt genomen, kleiner dan $\frac{\varepsilon}{3}$; hetzelfde geldt voor de integraal over $B - BC_1 - BC_2$. Aan de voorwaarde, die in de te bewijzen stelling genoemd wordt, wordt dus voldaan als men $\delta = \frac{\varepsilon}{3N}$ stelt, waarmede het bewijs geleverd is.

§ 117. Wij keeren thans weer terug tot het onderzoek der integralen van een functie, die op een rij van puntverzamelingen gedefiniëerd is.

Stelling. *Zij een functie $f(P)$ meetbaar op een rij over puntverzamelingen A_k $(k = 1, 2, \ldots)$ waarvan ieder een deel van alle volgende is. Indien de integraal over de limietverzameling A bestaat, is zij de limiet van de rij der integralen over de afzonderlijke puntverzamelingen.*

Zij Ω_k de ordinaatverzameling van $f(P)$ op de puntverzameling A_k en Ω de ordinaatverzameling op A. Men ziet gemakkelijk,

dat elke ordinaatverzameling Ω_k een deel van alle volgende is, en dat $\Omega = \lim \Omega_k$. Hieruit volgt de meetbaarheid van Ω, dus de meetbaarheid van $f(P)$ op A.

Door beschouwing van de functies $f_+(P)$ en $f_-(P)$ vindt men, dat voor de puntverzamelingen Ω_{k+} en Ω_{k-} hetzelfde geldt als voor Ω_k. Men heeft dus:

$$m\Omega_+ = \lim_{k=\infty} m\Omega_{k+}.$$

$$m\Omega_- = \lim_{k=\infty} m\Omega_{k-}.$$

Indien de integraal van $f(P)$ over A bestaat, is van de beide getallen $m\Omega_+$ en $m\Omega_-$ minstens éen eindig. Is bijv. $m\Omega_-$ eindig, dan geldt hetzelfde voor alle getallen $m\Omega_{k-}$. De integralen over de puntverzamelingen A_k bestaan dus; en trekt men de 2 bovenstaande vergelijkingen van elkander af, dan vindt men de te bewijzen stelling.

Bestaan omgekeerd de integralen over de puntverzamelingen Ω_k en is $\lim m\Omega_{k+}$ of $\lim m\Omega_{k-}$ eindig, dan volgt hieruit het bestaan van de integraal over A.

§ 118. **Stelling.** *Is een functie $f(P)$ sommeerbaar over een rij van puntverzamelingen A_k, waarvan ieder een deel van alle voorafgaande is, dan is haar integraal over de limietverzameling A de limiet van de integralen over de afzonderlijke puntverzamelingen.*

Men ziet weer gemakkelijk, dat de ordinaatverzameling Ω van $f(P)$ op A de limiet is van de ordinaatverzamelingen Ω_k op de afzonderlijke puntverzamelingen A_k. Hieruit volgt de meetbaarheid van Ω, dus de meetbaarheid van $f(P)$ op A.

Evenzoo is ook elke ordinaatverzameling Ω_{k+} een deel van alle voorafgaande, terwijl $\Omega_+ = \lim \Omega_{k+}$. Volgens stelling III van § 103 heeft men dus:

$$m\Omega_+ = \lim_{k=\infty} m\Omega_{k+}$$

$$m\Omega_- = \lim_{k=\infty} m\Omega_{k-}$$

Wegens de sommeerbaarheid van $f(P)$ over de puntverzamelingen A_k zijn $m\Omega_{k+}$ en $m\Omega_{k-}$ eindig. Daar de rij der getallen $m\Omega_{k+}$ monotoon en niet stijgend is, is ook de limiet $m\Omega_+$ eindig; evenzoo $m\Omega_-$. Trekt men nu de twee bovenstaande vergelijkingen van elkander af, dan vindt men de te bewijzen stelling.

§ 119. **Stelling.** *Is een functie $f(P)$ sommeerbaar over een convergente rij van puntverzamelingen A_k en kan men bij elk*

positief getal ε *een positief getal* N *vinden zoodanig, dat voor elke waarde van* k:

$$\int_{B_k} |\, f(P)\,|\, dV < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\int_{C_k} f(P)\, dV < Nm\, C_k + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\Big|\int_{D_k} f(P)\, dV\,\Big| < NmD_k + \frac{\varepsilon}{3}$$

dan is

$$\int_A f(P)\, dV = \lim_{k=\infty} \int_{A_k} f(P)\, dV.$$

Hierin is B_k de verzameling der punten van A_k, die gelegen zijn buiten het interval:

$$-N \leqq x_p \leqq +N \quad (p = 1,2 \ldots n).$$

C_k is de verzameling der punten van $A_k - B_k$ waar $f(P)$ grooter is dan N, en D_k is de verzameling der punten van $A_k - B_k$, waar $f(P) < -N$.

Indien de puntverzamelingen A_k convergeeren tot een limiet A, ziet men gemakkelijk, dat de bijbehoorende ordinaatverzamelingen Ω_k convergeeren tot de bij A behoorende ordinaatverzameling Ω.

Wij beschouwen nu afzonderlijk de ordinaatverzamelingen Ω_{k+} en Ω_{k-}. Van den puntverzameling Ω_{k+} beschouwen wij het deel, dat gelegen is buiten het $(n+1)$-dimensionale interval:

$$-N \leqq x_p \leqq +N. \; (p = 1,\, 2, \ldots . + n).$$

Dit deel bestaat ten eerste uit de ordinaten van $f_+(P)$, die behooren bij het deel B_k van de puntverzameling A_k. De verzameling dezer ordinaten is een deel van de verzameling der ordinaten van $|\, f(P)\,|$ in de punten van B_k, en de maat van deze ordinaatverzameling is dus niet grooter dan de integraal van $|f(P)|$ over B_k, dus $< \frac{\varepsilon}{3}$.

In de tweede plaats reiken buiten het genoemde interval de ordinaten van $f(P)$ in die punten van $A_k - B_k$, waar $f(P) > N$, dus in de punten van C_k. Het deel van deze ordinaatverzameling, dat buiten het genoemde interval gelegen is, is het verschil van die ordinaatverzameling en van een cylinder, die C_k tot basis en N tot hoogte heeft. Hieruit volgt in verband met het boven ondersteld, dat de maat van dit deel kleiner is dan $\frac{\varepsilon}{3}$.

Men ziet dus, dat het deel van Ω_{k+}, dat buiten het genoemde

interval gelegen is, een maat heeft, die kleiner is dan ε. De puntverzamelingen Ω_{k+} voldoen dus aan de voorwaarde van Stelling IV van § 103, waarbij U het genoemde interval is. Hieruit volgt:

$$m\Omega_{+} = m \lim_{k=\infty} \Omega_{k+} = \lim_{k=\infty} m\Omega_{k+},$$

terwijl deze limiet zeker eindig is. Evenzoo bewijst men:

$$m\Omega_{-} = \lim_{k=\infty} m\Omega_{k-},$$

terwijl deze limiet eindig is. Trekt men deze twee vergelijkingen van elkander af, dan vindt men de te bewijzen stelling.

§ 120. In de voorafgaande §§ hebben wij de limiet onderzocht van de integraal van een functie $f(P)$, die op een rij puntverzamelingen gedefiniëerd was. Wij zullen thans het geval beschouwen, dat op een gegeven puntverzameling een rij functies gedefiniëerd is.

Stelling. *Is op een puntverzameling A een rij meetbare functies $f_k(P)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ gegeven, zoodanig, dat steeds $f_k(P) \leqq f_{k+1}(P)$, terwijl de integralen dezer functies bestaan, en niet de waarde $-\infty$ hebben, dan bestaat ook de integraal van de limiet, en is gelijk aan de limiet van de integralen der functies.*

Uit $f_k(P) \leqq f_{k+1}(P)$ volgt:

$$f_{k+}(P) \leqq f_{(k+1)+}(P) \text{ en } f_{k-}(P) \leqq f_{(k+1)-}(P).$$

Elke ordinaatverzameling Ω_{k+} is dus een deel van alle volgende. Volgens §§ 87 en 88 is de maat van de ordinaatverzameling Ω_{+} der limietfunctie gelijk aan die van de limietverzameling der Ω_{k+}, dus:

$$m\Omega_{+} = \lim_{k=\infty} m\Omega_{k+}.$$

Verder is elke ordinaatverzameling $m\Omega_{k-}$ een deel van alle voorafgaande, terwijl uit het onderstelde volgt, dat de maten dezer ordinaatverzamelingen niet de waarde $+\infty$ hebben.

Verder is de ordinaatverzameling Ω_{-} der limietfunctie de limiet van de verzamelingen Ω_{k-}. Hieruit volgt:

$$m\Omega_{-} = \lim_{k=\infty} m\Omega_{k-}.$$

Hieruit volgt de stelling.

Evenzoo bewijst men de analoge stelling voor het geval, dat $f_k(P) \geqq f_{k+1}(P)$. In dit geval moet ondersteld worden, dat de integralen der functies bestaan, en niet de waarde $+\infty$ hebben.

De lezer onderzoeke verder het geval dat steeds $|f_k(P)| \leqq |f_{k+1}(P)|$, of dat steeds $|f_k(P)| \geqq |f_{k+1}(P)|$, terwijl opeenvolgende functies steeds hetzelfde teeken hebben. Hij bewijze de

analoge stellingen voor deze gevallen, en ga na, welke onderstellingen hierbij moeten worden gemaakt.

§ 121. **Stelling.** *Is op een puntverzameling A een convergente rij van meetbare functies $f_k(P)$ gegeven, en heeft de vereeniging van de ordinaatverzamelingen dezer functies een eindige maat, dan is de integraal van de limietfunctie over A gelijk aan de limiet van de integralen der functies.*

Volgens §§ 87 en 88 volgt uit de convergentie van de rij der functies $f_k(P)$, dat de ordinaatverzameling der limietfunctie $f(P)$ zich slechts door een verzameling van ordinateneindpunten onderscheidt van de bovenste en van de benedenste limiet van de ordinaatverzamelingen der functies $f_k(P)$. De ordinaatverzameling van $f(P)$ heeft dus dezelfde maat als de genoemde bovenste en benedenste limiet. Hetzelfde geldt voor de functie $f_+(P)$ als limiet der functies $f_{k+}(P)$ en voor de functie $f_-(P)$ als limiet der functies $f_{k-}(P)$. Verder volgt uit het onderstelde, dat voor deze ordinaatverzamelingen aan de voorwaarde van § 62 voldaan is.

Men heeft dus:

$$m\Omega_+ = \lim_{k=\infty} m\Omega_{k+}$$

$$m\Omega_- = \lim_{k=\infty} m\Omega_{k-},$$

terwijl beide limieten eindig zijn. Hieruit volgt de stelling.

Zooals men ziet, volgt tevens uit het gegevene, dat zoowel de functies van de rij als de limietfunctie *sommeerbaar* zijn.

§ 122. **Stelling.** *Is op een puntverzameling A een convergente rij van meetbare functies $f_k(P)$ gegeven, en kan men bij elk positief getal ε een positief getal N vinden zoodanig, dat voor elke waarde van k:*

$$\int_B |f_k(P)|\, dV < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\int_{C_k} f_k(P)\, dV < NmC_k + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\left|\int_{D_k} f_k(P)\, dV\right| < NmD_k + \frac{\varepsilon}{3},$$

dan is

$$\int_A f(P)\, dV = \lim_{k=\infty} \int_A f_k(P)\, dV.$$

Hierin is B de verzameling der punten van A, die gelegen zijn buiten het interval:

$$-N \leqq x_p \leqq +N. \ (p = 1, 2, \ldots . n).$$

C_k is de verzameling der punten van $A - B$, waar $f_k(P) > N$, en D_k is de verzameling der punten van $A - B$, waar $f_k(P) < -N$.

Evenals in § 118 volgt uit het ondersteIde, dat het deel eener ordinaatverzameling Ω_{k+}, dat gelegen is buiten het interval:

$$-N \leqq x_p \leqq +N \ (p = 1, 2, \ldots . n+1).$$

een maat heeft, die kleiner is dan ε. De verzamelingen Ω_{k+} voldoen dus aan de voorwaarde van § 64. Hieruit volgt:

$$m \underline{\lim}\, \Omega_{k+} \leqq \underline{\lim}\, m\Omega_{k+} \leqq \overline{\lim}\, m\Omega_{k+} \leqq m\, \overline{\lim}\, \Omega_{k+}.$$

De puntverzamelingen $\underline{\lim}\, \Omega_{k+}$ en $\overline{\lim}\, \Omega_{k+}$ verschillen van elkander en van de ordinaatverzameling Ω_+ der limietfunctie slechts door een verzameling van ordinateneindpunten, en hebben dus dezelfde maat. Men heeft dus:

$$m\Omega_+ = \lim_{k=\infty} m\Omega_{k+}.$$

Evenzoo is $$m\Omega_- = \lim_{k=\infty} m\Omega_{k-}.$$

Hieruit volgt de stelling.

§ **123.** Van de uitkomsten der laatste §§ maken wij nu gebruik, om de volgende, zeer belangrijke stelling te bewijzen.

Stelling. *Zijn op een puntverzameling A twee meetbare functies $f(P)$ en $\varphi(P)$ gegeven, welker integralen over A bestaan, dan is:*

$$\int_{A'} \{f(P) + \varphi(P)\}\, dV = \int_A f(\mathrm{P})\, dV + \int_A \varphi(P)\, dV,$$

indien het rechterlid dezer vergelijking zin heeft, (dus, wanneer niet één der beide integralen de waarde $+\infty$ en tegelijk de andere de waarde $-\infty$ heeft). Hierin is A' de verzameling der punten, waar de som $f(P) + \varphi(P)$ bestaat.

a. Wij beschouwen ten eerste het geval, dat $f(P)$ een constante, positieve waarde h, $\varphi(P)$ een constante, positieve waarde h' heeft. De ordinaatverzamelingen dezer functies zijn nu 2 cylinders, die A tot basis en respectievelijk h en h' tot hoogte hebben. De maten dezer ordinaatverzamelingen zijn dus respectievelijk hmA en $h'mA$. En dit zijn ook de waarden der integralen van $f(P)$ en $\varphi(P)$.

De ordinaatverzameling van $f(P) + \varphi(P)$ is een cylinder, die A tot basis en $h + h'$ tot hoogte heeft; de integraal van deze functie heeft dus de waarde $(h + h')\, mA$. Hiermede is de stelling voor dit geval bewezen.

b. Hebben de functies $f(P)$ en $\varphi(P)$ constante waarden h en h', die beide negatief zijn, dan zijn de 3 ordinaatverzamelingen

weer cylinders, welker hoogten zijn $|h|$, $|h'|$, en $|h+h'|$. De drie integralen hebben nu weer de waarden hmA, $h'mA$, en $(h+h')\,mA$, zoodat de stelling ook thans geldt.

c. Heeft $f(P)$ een constante waarde, en is steeds $\phi(P)=0$, dan is de ordinaatverzameling van $f(P)+\phi(P)$ dezelfde als die van $f(P)$, en dus ook $\int\limits_A \{f(P)+\phi(P)\}\,dV=\int\limits_A f(P)\,dV$. Verder is $\int\limits_A \phi(P)\,dV=0$, waarmede de stelling bewezen is.

d. Beschouwen wij thans het geval, dat $f(P)$ een constante, *positieve* waarde h, $\phi(P)$ een constante, *negatieve* waarde h' heeft. Wil nu aan het ondersteld voldaan zijn, dan moet mA eindig zijn, daar anders $\int\limits_A f(P)\,dV=+\infty$ en $\int\limits_A \phi(P)\,dV=-\infty$. Evenzoo mag van de beide getallen h en $|h'|$ slechts één de waarde $+\infty$ bezitten.

Is nu $h>|h'|$, dan is $f(P)+\phi(P)$ positief, terwijl de ordinaatverzameling dezer functie een cylinder is, waarvan de hoogte bedraagt $h-|h'|=h+h'$. De integraal van $f(P)+\phi(P)$ heeft dus de waarde $(h+h')\,mA$ en is dus gelijk aan de som der integralen van $f(P)$ en $\phi(P)$.

Is $h<|h'|$, dan vindt men dezelfde uitkomst. Wij laten het aan den lezer over, dit na te gaan.

e. Laten nu de functies $f(P)$ en $\phi(P)$ *karakteristieke sommen* zijn, die op een meetbare puntverzameling A van *eindige maat* worden beschouwd. De functie $f(P)$ neemt haar verschillende waarden, waarvan het aantal k moge bedragen, op k verschillende, meetbare deelverzamelingen van A aan; evenzoo de functie $\phi(P)$ haar k' verschillende waarden op k' meetbare deelverzamelingen van A. Wij kunnen A dus beschouwen als de som van kk' meetbare puntverzamelingen B, op elk waarvan zoowel $f(P)$ als $\phi(P)$ een constante eindige waarde bezitten. Voor elk van deze puntverzamelingen B geldt de te bewijzen stelling.

Volgens § 112 is nu voor elk der 3 functies $f(P)$, $\phi(P)$ en $f(P)+\phi(P)$ de integraal over A de som der integralen over de puntverzamelingen B.

Hieruit volgt de stelling voor de integralen over A.

f. Laten wij thans 2 willekeurige, *begrensde* en meetbare functies $f(P)$ en $\phi(P)$ beschouwen, die op een puntverzameling A van *eindige maat* gegeven zijn. Volgens het vorige hoofdstuk kan men de functie $\phi(P)$ verkrijgen als limiet van een rij meetbare karakteristieke sommen $\phi_k(P)$, die op de puntverzameling A beschouwd worden; evenzoo de functie $f(P)$ als limiet van een rij karakteristiek sommen $f_k(P)$. Voor elke waarde van den index

k heeft men nu:

$$\int_A \{f_k(P) + \phi_k(P)\}\, dV = \int_A f_k(P)\, dV + \int_A \phi_k(P)\, dV \quad . \quad (1)$$

De rij der functies $f_k(P) + \phi_k(P)$ is convergent, en heeft tot limiet de functie $f(P) + \phi(P)$. Is verder N een zoodanig positief getal, dat N grooter is dan de bovenste grenzen der functies $f(P)$ en $\phi(P)$ en $-N$ kleiner dan hun onderste grenzen, dan heeft men:

$$-2N < f_k(P) + \phi_k(P) < +2N.$$

Van elk der functies $f_k(P) + \phi_k(P)$ is dus de ordinaatverzameling een deel van de verzameling U der punten, wier projectie op de ruimte $x_{n+1} = 0$ een punt van A is, terwijl de coördinaat x_{n+1} tusschen $-N$ en $+N$ is gelegen. Deze puntverzameling U heeft een eindige maat; de functies $f_k(P) + \phi_k(P)$ voldoen dus aan de voorwaarden van § 121; hetzelfde geldt voor de functies $f_k(P)$ en voor de functies $\phi_k(P)$. Men heeft dus:

$$\left.\begin{aligned} \int_A \{f(P) + \phi(P)\}\, dV &= \lim_{k=\infty} \int_A \{f_k(P) + \phi_k(P)\}\, dV. \\ \int_A f(P)\, dV &= \lim_{k=\infty} \int_A f_k(P)\, dV. \\ \int_A \phi(P)\, dV &= \lim_{k=\infty} \int_A \phi_k(P)\, dV. \end{aligned}\right\} \quad . \quad (2)$$

Uit de vergelijkingen 1 en 2 volgt de te bewijzen stelling.

g. Laten wij thans 2 *begrensde* en meetbare functies $f(P)$ en $\phi(P)$ beschouwen, die op een puntverzameling A van *oneindige maat* gegeven zijn. Zij k een natuurlijk getal en zij I_k het n-dimensionale interval:

$$-k \leqq x_p \leqq +k. \quad (p = 1, 2, \ldots. n).$$

Wij stellen:

$$A_1 = AI_1, \; A_{k+1} = A(I_{k+1} - I_k) \ldots. (k = 1, 2, \ldots.).$$

De puntverzameling A is dan de som der puntverzamelingen A_k.

Volgens hetgeen in de te bewijzen stelling ondersteld wordt, bestaat $\int_A f(P)\, dV$. Volgens § 113 heeft men dus:

$$\int_A f(P)\, dV = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f(P)\, dV \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

evenzoo

$$\int_A \phi(P)\, dV = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} \phi(P)\, dV \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Daar elk der puntverzamelingen A_k een eindige maat heeft, kan men voor elk van deze puntverzamelingen de stelling toepassen. Telt men dus de rechterleden der vergelijkingen (3) en (4) bij elkander op, dan krijgt men

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} \{f(P) + \phi(P)\}\, dV.$$

Volgens § 113 zal de som dezer reeks gelijk zijn aan $\int_A \{f(P) + \phi(P)\}\, dV$, indien voor de functie $f(P) + \phi(P)$ minstens één der beide reeksen $\sum_{k=1}^{\infty} m\Omega_+(A_k)$ en $\sum_{k=1}^{\infty} m\Omega_-(A_k)$ convergeert. Hieraan wordt zeker voldaan, indien de functie $f(P) + \phi(P)$ op de puntverzameling *A niet van teeken wisselt*; in dit geval toch hebben òf alle puntverzamelingen $\Omega_+(A_k)$, òf alle puntverzamelingen $\Omega_-(A_k)$ de maat 0. In dit geval is dus de stelling *bewezen.* Om haar in het algemeen aan te toonen, merken wij het volgende op:

Volgens het ondersteldе is het geval uitgesloten, dat van de beide integralen $\int_A f(P)\, dV$ en $\int_A \phi(P)\, dV$ de een de waarde $+\infty$, en de andere de waarde $-\infty$ heeft.

Men kan dit ook zóó uitdrukken, dat òf geen der beide integralen de waarde $+\infty$, òf geen van beide de waarde $-\infty$ aanneemt. Beschouwen wij bijv. het geval, dat geen der beide integralen de waarde $-\infty$ bezit.

In dit geval zijn $\int_A f_-(P)\, dV$ en $\int_A \phi_-(P)\, dV$ beide eindig. Zij B de verzameling der punten van A, waar $f(P) + \phi(P)$ negatief is. In de punten van B is dan:

$$| f(P) + \phi(P) | \leqq | f_-(P) | + | \phi_-(P) |.$$

De functie $| f_-(P) | + | \phi_-(P) |$ wisselt op de puntverzameling B niet van teeken. Men heeft dus:

$$\int_B \{ | f_-(P) | + | \phi_-(P) | \}\, dV = \int_B | f_-(P) |\, dV + \int_B | \phi_-(P) |\, dV$$

Het rechter lid dezer vergelijking heeft een eindige waarde. Volgens § 108 is de integraal der functie $| f(P) + \phi(P) |$ over B niet grooter dan die van $| f_-(P) | + | \phi_-(P) |$; deze integraal heeft dus ook een eindige waarde. Deze integraal is nu echter niets anders dan de maat van de ordinaatverzameling $\Omega_-(A)$ der functie $f(P) + \phi(P)$. En daar $m\Omega_-(A) = \sum_{k=1}^{\infty} m\Omega_-(A_k)$, is de

convergentie dezer laatste reeks aangetoond. Hiermede is de stelling bewezen.

h. Beschouwen wij thans het geval, dat de functies $f(P)$ en $\phi(P)$ *niet* begrensd zijn. Zij k een natuurlijk getal. Wij definieëren nu een functie $f_k(P)$ door de volgende definities:

$$f_k(P) = f(P), \text{ indien } -k < f(P) < +k.$$
$$f_k(P) = +k, \text{ indien } f(P) \geqq k.$$
$$f_k(P) = -k, \text{ indien } f(P) \leqq -k.$$

Door de analoge definities definieëren wij bij de functie $\phi(P)$ en het getal k een functie $\phi_k(P)$. In ieder punt P der, boven gedefinieërde, puntverzameling A' heeft men dan:

$$\lim_{k=\infty} f_k(P) = f(P)$$
$$\lim_{k=\infty} \phi_k(P) = \phi(P)$$
$$\lim_{k=\infty} \{ f_k(P) + \phi_k(P) \} = f(P) + \phi(P).$$

Wij beschouwen het geval, dat de integralen van $f(P)$ en $\phi(P)$ over A′ geen van beide de waarde $-\infty$ hebben.

Wij verdeelen de puntverzameling A' in aftelbaar vele puntverzamelingen $A_{r,s}$ $(r = 0, 1, \ldots, \infty;\ s = 0, 1, \ldots, \infty)$, zoodanig dat:

$$\text{op } A_{o,o} \text{ is } f(P) \geqq 0,\ \phi(P) \geqq 0$$
$$\text{op } A_{r,o}\ (r > 0) \text{ is } -r+1 > f(P) \geqq -r,\ \phi(P) \geqq 0$$
$$\text{op } A_{o,s}\ (s > 0) \text{ is } f(P) \geqq 0,\ -s+1 > \phi(P) \geqq -s$$
$$\text{op } A_{r,s}\ (r > 0,\ s > 0) \text{ is} -r+1 > f(P) \geqq -r, -s+1 > f(P) \geqq -s.$$

Is $r = \infty$, dan moet men de betrekkingen, waarin r voorkomt, vervangen door $f(P) = -\infty$; is $s = \infty$, dan moet men de betrekkingen, waarin s voorkomt, vervangen door $\phi(P) = -\infty$.

Volgens Hoofdstuk I vormen de puntverzamelingen $A_{r,s}$ een aftelbare verzameling en kan men hen dus in een rij rangschikken.

Op een puntverzameling $A_{r,s}$, waarvoor de indices r en s beide eindig en grooter dan 0 zijn, heeft men, zoodra k grooter is dan het grootste der beide getallen r en s:

$$f_k(P) = f(P),\ \phi_k(P) = \phi(P).$$
$$f_k(P) + \phi_k(P) = f(P) + \phi(P).$$

Op $A_{o,o}$ vormen de functie's $f_k(P)$ een monotone, niet dalende rij; evenzoo de functie's $\phi_k(P)$ en dus ook de functie's $f_k(P) + \phi_k(P)$.

Op een puntverzameling $A_{r,o}$ (r eindig en > 0) vormen de functie's $\phi_k(P)$ een monotone, niet dalende rij, terwijl de functie's $f(P)$ vanaf de index $k = r$ dezelfde blijven; vanaf de index

$k = r$ vormen dus de functie's $f_k(P) + \phi_k(P)$ eveneens een monotone, niet dalende rij.

Uit de onderstelling, dat de integralen van $f(P)$ en $\phi(P)$ over A' geen van beide de waarde $-\infty$ hebben, volgt, dat de verzameling van punten van A', waar minstens één der beide functie's de waarde $-\infty$ heeft, de maat 0 bezit. Alle puntverzamelingen $A_{r,\infty}$ en $A_{\infty,s}$ hebben dus de maat 0, en elke integraal over een dezer puntverzamelingen heeft dus de waarde 0.

Uit het voorafgaande volgt, volgens § 119, dat voor elk stel waarden van r en s:

$$\int_{A_{r,s}} f(P)\,dV = \lim_{k=\infty} \int_{A_{r,s}} f_k(P)\,dV$$

$$\int_{A_{r,s}} \phi(P)\,dV = \lim_{k=\infty} \int_{A_{r,s}} \phi_k(P)\,dV$$

$$\int_{A_{r,s}} \{f(P) + \phi(P)\}\,dV = \lim_{k=\infty} \int_{A_{r,s}} \{f_k(P) + \phi_k(P)\}\,dV.$$

Daar de functie's $f_k(P)$ en $\phi_k(P)$ begrensd zijn, heeft men:

$$\int_{A_{r,s}} \{f_k(P) + \phi_k(P)\}\,dV = \int_{A_{r,s}} f_k(P)\,dV + \int_{A_{r,s}} \phi_k(P)\,dV.$$

Uit het voorafgaande volgt:

$$\int_{A_{r,s}} \{f(P) + \phi(P)\}\,dV = \int_{A_{r,s}} f(P)\,dV + \int_{A_{r,s}} \phi(P)\,dV.$$

Daar de integraal van $f(P)$ over A' *niet* de waarde $-\infty$ heeft, is voor deze functie $m\Omega_-(A')$ eindig en convergeert dus de reeks $\Sigma m\Omega_-(A_{r,s})$. Hetzelfde geldt voor de functie $\phi(P)$. Door een redeneering, analoog aan die, welke boven onder g gehouden werd, vindt men, dat hetzelfde geldt voor de functie $f(P) + \phi(P)$. Men heeft dus:

$$\int_{A'} f(P)\,dV = \Sigma \int_{A_{r,s}} f(P)\,dV.$$

De analoge vergelijkingen gelden voor de functies $\phi(P)$ en $f(P) + \phi(P)$. Hieruit volgt:

$$\int_{A'} \{f(P) + \phi(P)\}\,dV = \int_{A'} f(P)\,dV + \int_{A'} \phi(P)\,dV.$$

De verzameling $A - A'$ der punten, waarop één der functies $f(P)$ en $\phi(P)$ de waarde $+\infty$, de andere de waarde $-\infty$ bezit, heeft de maat 0, zoodat ook elke integraal over deze puntverzameling de waarde 0 heeft. Men heeft dus:

$$\int_{A'} \{f(P) + \phi(P)\}\,dV = \int_{A} f(P)\,dV + \int_{A} \phi(P)\,dV,$$

hetgeen te bewijzen was.

De lezer behandele het geval, dat de integralen van $f(P)$ en $\phi(P)$ over A' geen van beide de waarde $+\infty$ hebben.

Door volledige inductie vindt men de analoge stelling voor het geval van een eindig aantal functies.

§ **124*a*.** In § 106 hebben wij aangetoond, dat op een meetbare puntverzameling A van eindige maat elke begrensde, meetbare functie sommeerbaar is. Wij zullen thans enkele stellingen afleiden, waardoor men in de eenvoudigste gevallen, waarin $mA = +\infty$, of de functie niet begrensd is, de sommeerbaarheid kan onderzoeken.

Zij P een punt eener n-dimensionale ruimte, waarvan de coördinaten $x_1, x_2, \ldots . x_n$ zijn.

Zij $\phi(P)$ het grootste geheele getal, dat niet àlle getallen $|x_1|, |x_2|, \ldots . |x_n|$ overtreft. Men heeft dan de

Stelling. *De functie* $\left\{\frac{1}{\phi(P)}\right\}^q$ *is sommeerbaar over het deel der ruimte, gelegen buiten het interval* $-1 \leqq x_p \leqq +1, (p = 1, 2, \ldots . n)$, *indien* $q > n$.

Zij A_k het deel der ruimte R_n, gelegen buiten het interval $-k \leqq x_p \leqq +k$, doch behoorende tot het interval $-(k+1) \leqq x_p \leqq k+1$.

Is P een inwendig punt van A_k, dan ziet men onmiddellijk, dat $\phi(P) = k$. De maat van A_k bedraagt $(k+1)^n - k^n$, terwijl de verzameling der niet-inwendige punten van A_k de maat 0 heeft. Hieruit volgt:

$$\int\limits_{A_k} \left\{\frac{1}{\phi(P)}\right\}^q dV = \frac{(k+1)^n - k^n}{k^q}.$$

Het deel der ruimte, waarvan in de te bewijzen stelling sprake is, is de som der puntverzamelingen A_k. Daar de te integreeren functie positief is, is de integraal de som der integralen over de puntverzamelingen A_k. Deze integralen vormen nu een oneindig voortloopende reeks, welke *convergeert* voor $q > n$. (De lezer bewijze dit uitvoerig).

Voor $q \leqq n$ *divergeert* de reeks. De beschouwde integraal heeft dan dus de waarde $+\infty$.

§ **124*b*.** Zij weer P een punt eener n-dimensionale ruimte met de coördinaten $x_1, x_2, \ldots . x_n$. Zij $\psi(P)$ het grootste geheele getal, dat geen der getallen $\left|\frac{1}{x_1}\right|, \left|\frac{1}{x_2}\right|, \ldots . \left|\frac{1}{x_n}\right|$ overtreft; en zij $\psi(P) = +\infty$, wanneer $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Wij hebben nu de

Stelling. *De functie* $\{\psi(P)\}^q$ *is sommeerbaar over het interval* $-1 \leqq x_p \leqq +1$. $(p=1, 2, \ldots . n)$, *wanneer* $q < n$.

Zij A_k de verzameling der punten, behoorende tot het interval $\frac{-1}{k} \leqq x_p \leqq \frac{+1}{k}$, doch niet tot het interval

$$-\frac{1}{k+1} \leqq x_p \leqq \frac{1}{k+1}.$$

Het interval $-1 \leqq x_p \leqq +1$ is dan de som van alle puntverzamelingen A_k en van het punt $(0, 0, \ldots . , 0)$. Voor de punten van A_k is nu $\psi(P)=k$. Men heeft dus:

$$\int_{A_k} \{\psi(P)\}^q \, dV = k^q \left\{\frac{1}{k^n} - \frac{1}{(k+1)^n}\right\}.$$

De integralen over de puntverzamelingen A_k vormen de termen eener oneindig voortloopende reeks, welke convergeert voor $q < n$, divergeert voor $q \geqq n$. Daar de te integreeren functie positief is, is de integraal over het interval $-1 \leqq x_p \leqq +1$ de som van de integralen over de puntverzamelingen A_k, dus eindig voor $q < n$, $+\infty$ voor $q \geqq n$. Hiermede is de stelling bewezen.

§ **125.** Wij zullen enkele voorbeelden geven van de toepassing der stellingen over de integraal eener limiet. Hiertoe diene eerst het volgende.

In het voorafgaande hebben wij telkens de limiet $f(P)$ beschouwd eener *rij* van functies $f_k(P)$ $(k=1, 2, \ldots .)$ Zeer vaak komt nu echter een eenigszins andere vorm van grensovergang voor.

Zij $f(P, t)$ een functie, waarvan de waarde niet alleen van het punt P, maar ook van de waarde eener parameter t afhangt: of, anders uitgedrukt:

Zij aan elke combinatie van een punt P uit een n-dimensionale puntverzameling A en van een getal t uit een zekere getallenverzameling een getal $f(P, t)$ toegevoegd. Zij α een zeker getal dat verdichtingspunt van de genoemde getallenverzameling is. Men schrijft nu:

$\phi(P) = \lim\limits_{t=\alpha} f(P, t)$, indien bij elk positief getal ε en bij elk punt P een positief getal $\delta(P, \varepsilon)$ bestaat zóódanig, dat

$$| f(P, t) - \phi(P) | < \varepsilon \text{ voor } | t - \alpha | < \delta(P, \varepsilon).$$

Wij zullen nu aantoonen, dat, wanneer $f(P, t)$ zulk een limiet $\phi(P)$ heeft. men deze functie $\phi(P)$ ook kan verkrijgen als limiet van een rij functies $f(P, t)$. Hiertoe laten wij t een rij waarden t_k doorloopen, welke α tot limiet heeft. Is P nu een punt van

A, en is ε willekeurig gekozen, dan zal vanaf een zekere waarde van den index k voortdurend $| t_k - \alpha | < \delta(P, \varepsilon)$ zijn, dus

$$| f(P, t_k) - \phi(P) | < \varepsilon.$$

Hieruit volgt, dat $\phi(P)$ de limiet is van de rij der getallen $f(P,t_k)$, waarmede het gestelde bewezen is.

Bij de nu volgende voorbeelden onderstellen wij, dat de lezer bekend is met de elementaire functies der analyse en met de grondstellingen der differentiaalrekening. Verder merken wij nog op, dat door $\int_a^b f(x)\, dx$ een integraal wordt aangeduid over het één-dimensionale interval $a \leqq x \leqq b$.

a. De lezer bewijze met behulp van de stelling van § 124*b*, dat $\int_0^\alpha x^\beta\, dx\, (\alpha > 0)$ een eindige waarde heeft, wanneer $\beta > -1$, doch de waarde $+\infty$, wanneer $\beta \leqq -1$.

Hiertoe vergelijke men de functie x^β met de functie $\{\psi(P)\}^\beta$.

b. Men vraagt, te bewijzen:

$$\int_0^\alpha \frac{\lg x}{1-x}\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^a x^k \lg x dx. \quad (0 < \alpha < 1). \quad . \quad . \quad (1)$$

Om dit te bewijzen, merken wij op, dat voor $0 < x < 1$:

$$\lim_{N=\infty} \sum_{k=0}^{N} x^k \lg x = \frac{\lg x}{1-x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

terwijl de uitdrukking, die links achter het teeken lim staat, negatief is en bij toename van N voortdurend afneemt. Volgens § 120 heeft men dus:

$$\lim \int_0^a \left(\sum_{k=}^{N} x^k \lg x \right) dx = \int_0^a \left(\lim_{N=\infty} \sum_{k=0}^{N} x^k \lg x \right) dx \quad . \quad . \quad (3)$$

Het rechterlid van de formule (3) is volgens (2) gelijk aan het linkerlid van de formule (1). Het linkerlid van de formule (3) is gelijk aan:

$$\lim_{N=\infty} \sum_{k=0}^{N} \int_0^a x^k \lg x dx$$

en dit is gelijk aan het rechterlid van de formule (

De vraag rijst, of de hier beschouwde integra een eindige waarde bezit. Men ziet gemakkelijk, dat dit het geval is, wanneer $\int_0^a \lg x dx$ eindig is. Om dit aan te toonen, merken wij op, dat, wanneer β een willekeurig getal is tusschen 0 en -1,

men heeft:

$$\lim_{x=0} \frac{\lg x}{x^\beta} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Hieruit volgt, dat men een positief getal A kan vinden, zóódanig, dat voor $0 < x < \alpha$ steeds:

$$| \lg x | < Ax^\beta.$$

De eindigheid der genoemde integraal volgt dan uit de eindigheid van $\int_0^\alpha Ax^\beta\, dx$.

c. De lezer bewijze op overeenkomstige wijze:

$$\int_\alpha^1 \frac{\lg x}{1-x} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_\alpha^1 x^k \lg x dx \quad (0 < \alpha < 1).$$

d. Zij gegeven een functie $f(x, \alpha)$ van twee veranderlijken x en α. Wij onderstellen, dat deze functie *differentiëerbaar* is naar α, en zullen de partiëele afgeleide naar α aanduiden door $f'_\alpha(x, \alpha)$. Men vraagt nu, een voorwaarde op te stellen, waaronder voor een bepaalde waarde α_0 van α het volgende geldt:

$$\lim_{h=0} \frac{1}{h} \left\{ \int_a^b f(x, \alpha_0 + h)\, dx - \int_a^b f(x, \alpha_0)\, dx \right\} =$$

$$= \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha_0)\, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Men vraagt m. a. w. een voorwaarde, waaronder „differentiëeren onder het integraalteeken" geoorloofd is.

Om een zoodanige voorwaarde af te leiden, merken wij op, dat men voor de uitdrukking, die in het linkerlid der formule (1) achter het teeken lim staat, het volgende kan schrijven:

$$\int_a^b \frac{f(x, \alpha_0 + h) - f(x, \alpha_0)}{h} dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Nadert h tot 0, dan nadert de functie, die in de uitdrukking (2) achter het integraalteeken staat, tot $f'_\alpha(x, \alpha_0)$.

Wij zullen eerst het geval beschouwen dat h uitsluitend *positieve* waarden aanneemt.

Uit de stelling van § 120 volgt, dat de limiet van de integraal gelijk zal wezen aan de integraal van de limiet, indien de geïntegreerde functie niet afneemt, wanneer h bij het naderen tot 0 niet toeneemt. Hiertoe is noodzakelijk en voldoende, dat vanaf

een zekere waarde h_1 van h de afgeleide dezer functie naar h niet positief is.

De formule (1) zal dus gelden indien het mogelijk is, een positief getal h_1 te vinden zóódanig, dat voor $0 < h < h_1$ en $a < x < b$ steeds:

$$h f'_a(x, \alpha_0 + h) - f(x, \alpha_0 + h) + f(x, \alpha_0) \leqq 0 \quad . \quad . \quad (3)$$

Is in het bijzonder de functie $f(x, \alpha)$ tweemaal naar α differentiëerbaar, dan vindt men door het linkerlid van de formule (3) volgens de formule van MACLAURIN te ontwikkelen, dat dit linkerlid gelijk is aan

$$\frac{h^2}{2} f''_{\alpha\alpha}(x, \alpha_0 + \theta h).$$

Aan de voorwaarde (3) zal dus zeker voldaan zijn, indien voor $a < x < b$ en $0 < h < h_1$ steeds:

$$f''_{\alpha\alpha}(x, \alpha_0 + h) \leqq 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Beschouwen wij nu het geval, dat h uitsluitend *negatieve* waarden aanneemt. Men vindt dan, als men de stelling aan het *slot* van § 120 toepast, dat het gestelde waar zal zijn, indien er een negatief getal $-h_1$ bestaat zoodanig, dat voor $a < x < b$ en $-h_1 < h < 0$ steeds aan één der voorwaarden (3) of (4) voldaan is.

Kan h zoowel positieve als negatieve waarden aannemen, dan moet voor $a < x < b$ en $-h_1 < h < h_1$ steeds aan één der voorwaarden (3) of (4) voldaan zijn.

De voorwaarden (3) en (4) zijn afgeleid door toepassing van de stellingen van § 120. Voor deze toepassing is echter noodzakelijk, dat de integralen, welker limiet bepaald moet worden, niet de waarde $-\infty$ of $+\infty$ hebben. De lezer overtuige zich, dat hieruit de beide volgende voorwaarden voortvloeien, aan elk waarvan voldaan moet zijn:

1⁰. De integraal $\int_a^b f(x, \alpha_0)\, dx$ heeft niet de waarde $-\infty$ of $+\infty$.

2⁰. De integraal $\int_a^b f(x, \alpha_0 + h)\, dx$ heeft niet de waarde $-\infty$ of $+\infty$, althans voor een verzameling waarden van h, die nul tot verdichtingspunt heeft.

e. Past men voor h positief niet de stelling toe, die in het begin van § 120, maar die, welke aan het slot van § 120 genoemd is, (het geval $f_k(P) \geqq f_{k+1}(P)$), dan vindt men, dat het differentieëren ook geoorloofd is, indien voldaan is aan voorwaarden, welke men verkrijgt, door in de formuleering der voorwaarden (3) en (4) het teeken $\leqq$ door $\geqq$ te vervangen. Tevens moet voldaan zijn aan

voorwaarden betreffende de eindigheid der beschouwde integralen, analoog aan de zooeven genoemde.

f. Past men de stelling van § 121 toe, dan krijgt men een ander geval, waarin differentieëren onder het integraalteeken geoorloofd is.

Hiertoe merken wij op dat volgens de middelwaardestelling der differentiaalrekening:

$$\frac{f(x, \alpha_0 + h) - f(x, \alpha_0)}{h} = f'_\alpha(x, \alpha_0 + \theta h).$$

Uit de stelling van § 121 volgt nu, dat de formule (1) geldig is, indien de vereeniging der ordinaatverzamelingen van de functies $f'_\alpha(x, \alpha_0 + \theta h)$, (voor een rij waarden van h, die 0 tot limiet heeft), een eindige maat bezit. Dit zal het geval wezen, indien men een positief getal h_1 kan vinden en een positieve functie $M(x)$ van x zóódanig, dat voor $a < x < b$ en $-h_1 < h < h_1$ steeds,

$$| f'_\alpha(x, \alpha_0 + h) | \leqq M(x),$$

terwijl $\int_a^b M(x)\, dx$ eindig is.

§ **126.** In het begin van dit hoofdstuk hebben wij een integraal gedefiniëerd met behulp van de maten van 2 ordinaatverzamelingen. Wij zullen nu omgekeerd zien, hoe men de maat van een puntverzameling met behulp van integralen kan uitdrukken. Hiertoe diene eerst het volgende:

Beschouwen wij in een n-dimensionale ruimte R_n de verzameling S der punten, waarvoor de coördinaat x_n een gegeven waarde heeft. Wij kunnen een punt P van S toevoegen aan het punt eener $(n-1)$-dimensionale ruimte R_{n-1}, waarvan de $(n-1)$ coördinaten respectievelijk gelijk zijn aan de eerste $(n-1)$ coördinaten van P. Vervolgens kunnen wij de aldus aan elkander toegevoegde punten met elkaar identificeeren. De puntverzameling S wordt aldus tot een $(n-1)$-dimensionale ruimte, en elke deelverzameling van S wordt een $(n-1)$-dimensionale puntverzameling, en heeft als zoodanig een bepaalde $(n-1)$-maat. (Wij hebben dit procédé tot nu toe voortdurend toegepast voor het geval, dat de laatste coördinaat de waarde 0 had; in deze § zullen wij het echter ook voor een willekeurige, gegeven waarde der laatste coördinaat toepassen).

Zij nu in de ruimte R_n een puntverzameling V gegeven. Bij elke waarde van de coördinaat x_n behoort een ruimte S, en de doorsnede SV heeft een bepaalde $(n-1)$-maat. Deze $(n-1)$-maat is dus een *functie* $f(x_n)$ van de coördinaat x_n. De stelling, die wij nu zullen bewijzen, luidt als volgt:

Stelling: *Is V een meetbare, n-dimensionale puntverzameling, dan is $f(x_n)$ een meetbare functie, en de maat van V is gelijk aan de integraal van $f(x_n)$ over de één-dimensionale ruimte der waarden van x_n.*

Aan het bewijs van deze stelling moeten de bewijzen van verschillende hulpstellingen voorafgaan.

Hulpstelling I: *De te bewijzen stelling geldt voor het geval, dat de puntverzameling V een open of gesloten n-dimensionaal interval is.*

Zij het interval *gesloten* en gegeven door de betrekkingen:

$$a_p \leqq x_p \leqq b_p \quad (p = 1, 2, \ldots . n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

De n-maat van V is nu gelijk aan het product

$$(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \ldots . (b_n - a_n).$$

De puntverzameling SV is een $(n-1)$-dimensionaal interval, wanneer x_n voldoet aan de betrekkingen $a_n \leqq x_n \leqq b_n$; dit interval is als zoodanig gegeven door de eerste $(n-1)$ der betrekkingen (1). De $(n-1)$-maat van dit interval bedraagt

$$(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \ldots . (b_{n-1} - a_{n-1}).$$

Dit is dus de waarde van $f(x_n)$, wanneer $a_n \leqq x_n \leqq b_n$. Voor andere waarden van x_n is de doorsnede SV leeg, en dus $f(x_n) = 0$.

De integraal van $f(x_n)$ over de één-dimensionale ruimte is de som van de integralen over het interval $a_n \leqq x_n \leqq b_n$ en over de complementairverzameling van dit interval. De eerste dezer integralen heeft volgens § 105 de waarde

$$(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \ldots (b_{n-1} - a_{n-1})(b_n - a_n);$$

de tweede integraal heeft de waarde 0. Hieruit volgt de stelling.

V een *open* n-dimensionaal interval, dan verloopt het bewijs volkomen analoog.

Hulpstelling II: *Geldt de te bewijzen stelling voor eindig of aftelbaar vele puntverzamelingen zonder gemeenschappelijke punten, welker doorsneden met een ruimte S steeds meetbare, $(n-1)$-dimensionale puntverzamelingen zijn, dan geldt zij ook voor de som dier puntverzamelingen.*

Zij $\qquad V = V_1 + V_2 + \ldots .$

Dan is volgens § 59:

$$mV = mV_1 + mV_2 + \ldots . .$$

Evenzoo heeft men voor elke puntverzameling S:

$$mSV = mSV_1 + mSV_2 + \ldots . ,$$

in welke laatste formule het teeken m de $(n-1)$-maat aanduidt.

Hieruit volgt de meetbaarheid van mSV als functie van x_n.

Is het aantal puntverzamelingen V_k *eindig*, dan is volgens § 123 de integraal van de functie mSV de som van de integralen der fuucties mSV, dus gelijk aan mV, en is hiermede de stelling bewezen.

Is het aantal puntverzamelingen V_k aftelbaar, dan is

$$mSV = \lim_{r=\infty} \sum_{k=1}^{k=r} mSV_k.$$

Volgens § **120** heeft men dus, indien men onder het integraalteeken dx_n inplaats van dV schrijft, om aan te duiden, van welke grootheid de beschouwde functie afhangt:

$$\begin{aligned}\int_{R_1} (mSV)\, dx_n &= \lim_{r=\infty} \int_{R_1} \sum_{k=1}^{k=r} (mSV_k)\, dx_n \\ &= \lim_{r=\infty} \sum_{k=1}^{k=r} \int_{R_1} (mSV_k)\, dx_n \\ &= \sum_{k=1}^{k=\infty} \int_{R_1} (mSV_k)\, dx_n \\ &= \sum_{k=1}^{k=\infty} mV_k = mV,\end{aligned}$$

waarmede de hulpstelling bewezen is.

Hulpstelling III: *Geldt de te bewijzen stelling voor een puntverzameling V van de maat 0, dan geldt zij ook voor elke deelverzameling van V.*

Zij W een deelverzameling van V. Dan is voor elke puntverzameling S de doorsnede SW een deel van SV, en dus:

$$0 \leqq mSW \leqq mSV.$$

Hieruit volgt, dat de ordinaatverzameling der functie mSW een deel is van de ordinaatverzameling der functie mSV. De maat dezer laatste ordinaatverzameling is 0, daar zij volgens het onderstelde gelijk is aan de n-maat van V. De maat van de eerste ordinaatverzameling is dus meetbaar, en haar maat is gelijk aan de n-maat van W, waarmee het gestelde bewezen is.

Hulpstelling IV. *Geldt de te bewijzen stelling voor twee begrensde puntverzamelingen A en B, waarvan de laatste een deel is van de eerste. en die de eigenschap hebben, dat hun doorsneden met een ruimte S steeds meetbare, $(n-1)$-dimensionale puntverzamelingen zijn, dan geldt zij ook voor de puntverzameling $A-B$.*

Daar SA en SB meetbare $(n-1)$-dimensionale puntverzame-

lingen zijn, welker maten wegens de begrensdheid niet de waarde $+\infty$ kunnen hebben, heeft men:

$$mS(A-B)=mSA-mSB.$$

Hieruit volgt dat $mS(A-B)$ een meetbare functie van x_n is. Verder heeft men:

$$\int_{R_1}\{mS(A-B)\}\,dx_n=\int_{R_1}(mSA)\,dx_n-\int_{R_1}(mSB)\,dx_n.$$

$$=mA-mB=m(A-B),$$

waarmede het gestelde bewezen is.

Hulpstelling V. *De te bewijzen stelling geldt voor een puntverzameling, welke de som is van een open, n-dimensionaal interval, en van een deel van zijn begrenzing.*

Volgens IV geldt de stelling voor de begrenzing van een n-dimensionaal interval, daar deze begrenzing het verschil is van een gesloten en een open interval, voor elk waarvan volgens I de stelling geldt. Daar de genoemde begrenzing de maat 0 heeft, geldt de stelling volgens III voor elk deel van de begrenzing.

Wij kunnen verder opmerken, dat bij de formuleering van hulpstelling II de zinsnede: „welker doorsneden met een ruimte S steeds meetbare, $(n-1)$-dimensionale puntverzamelingen zijn," kan worden aangevuld met de woorden: „behalve voor een verzameling waarden van x_n, welke de maat 0 heeft", zonder dat de stelling haar geldigheid verliest. Immers, moet men deze restrictie maken, dan beteekent dit, dat voor een verzameling waarden van x_n van de maat 0 de vergelijking:

$$mSV=mSV_1+mSV_2+\ldots\ldots$$

niet behoeft te gelden. Indien men nu echter in de punten van een puntverzameling van de maat 0 de waarden eener functie verandert, verandert hierdoor nòch de meetbaarheid der functie nòch de waarde van haar integraal. Het verdere bewijs van de hulpstelling II blijft dus geldig.

Beschouwt men nu een deelverzameling D van de begrenzing van een n-dimensionaal interval, dat gedefinieerd wordt door de betrekkingen:

$$a_p \leqq x_p \leqq b_p. \quad (p=1,2,\ldots.n).$$

Een puntverzameling SD is nu een deel van de begrenzing van een $(n-1)$-dimensionaal interval, en heeft dus de $(n-1)$-maat 0, behalve wanneer $x_n=a_n$, of $x_n=b_n$. Voor deze 2 waarden van x behoeft SD niet meetbaar te zijn. De puntverzameling D voldoet dus aan de onderstellingen der gewijzigde

hulpstelling II, en de te bewijzen stelling geldt dus voor de som van D en van een open interval.

Hulpstelling VI. *De te bewijzen stelling geldt voor een open puntverzameling.*

Zij U de gegeven open puntverzameling. Volgens hoofdstuk II kan men U verkrijgen als vereeniging van aftelbaar vele, gesloten intervallen I, welke 2 aan 2 geen inwendig punt gemeen hebben. Wij denken ons deze intervallen I in een rij gerangschikt. Uit elk interval I leiden wij een puntverzameling I' af, door van het beschouwde interval I af te trekken de verzameling der punten, die deel uitmaken van de begrenzing van een aan I voorafgaand interval. De puntverzameling U is dan de *som* der puntverzamelingen I'.

Volgens V geldt nu de stelling voor elke puntverzameling I'. Volgens II (eventueel gewijzigd, zooals wij dit bij het bewijs van V hebben aangegeven), geldt de stelling dus ook voor U.

Hulpstelling VII. *De te bewijzen stelling geldt voor een puntverzameling van de maat 0.*

Zij N een puntverzameling van de maat 0. Is ε een willekeurig, positief getal, dan kan men volgens hoofdstuk III een open puntverzameling U vinden, waarvan N een deel is, en waarvan de maat kleiner is dan ε. Voor deze laatste puntverzameling geldt de te bewijzen stelling, en heeft men dus

$$\int_{R_1} (mSU)\, dx_n = mU < \varepsilon.$$

Daar N een deel is van U, is SN een deel van SU, dus $mSN \leqq mSU$. De ordinaatverzameling der functie mSN van x_n is dus een deel van een puntverzameling, waarvan de maat kleiner dan ε is. Daar men ε willekeurig kan kiezen, heeft de genoemde ordinaatverzameling de maat 0. De functie mSN is dus meetbaar, en haar integraal heeft de waarde 0, en is dus gelijk aan mN.

Past men op de functie mSN, welke geen negatieve waarden kan aannemen, de stelling van § 106 toe, dan vindt men, dat de verzameling der waarden van x_n, waarvoor $mSN > 0$, de maat 0 heeft.

Hulpstelling VIII. *Geldt de te bewijzen stelling voor een rij van begrensde puntverzamelingen V_k $(k = 1, 2, \ldots .)$, waarvan ieder een deel van alle voorafgaande is, en welker doorsneden met een ruimte S meetbare, $(n - 1)$-dimensionale puntverzamelingen zijn, (behalve voor een verzameling waarden van x_n van de maat 0), dan geldt zij ook voor de limietverzameling V.*

Daar elke puntverzameling SV_k een deel is van alle voorafgaande en de maten dezer puntverzamelingen eindig zijn, heeft

men, (behalve eventueel voor een verzameling waarden van x_n van de maat 0):

$$mSV = \lim_{k=\infty} mSV_k.$$

Hieruit volgt de meetbaarheid der functie mSV.

Volgens § 120 heeft men verder:

$$\int_{R_1} (mSV)\, dx_n = \lim_{k=\infty} \int_{R_1} (mSV_k)\, dx_n.$$
$$= \lim mV_k = mV,$$

waarmede het gestelde bewezen is.

Neemt men in het bijzonder voor de puntverzamelingen V_k open puntverzamelingen, dan vindt men, dat de stelling geldt voor elke *begrensde inwendige grensverzameling.*

Hulpstelling IX. *De stelling geldt voor elke begrensde puntverzameling.*

Zij V de beschouwde puntverzameling. Deze moet, zal de stelling toepasselijk zijn, *meetbaar* zijn. Zij is dan, volgens hoofdstuk III, het verschil van een inwendige grensverzameling en van een puntverzameling van de maat 0. Voor elk van deze geldt de stelling, terwijl hun doorsneden met een ruimte S meetbare, $(n-1)$-dimensionale puntverzamelingen zijn, (behalve, wat de tweede betreft, voor een eventueele verzameling waarden van x_n van de maat 0).

Zooals men zonder moeite aantoont, kan in de formuleering van hulpstelling IV dezelfde wijziging worden aangebracht als in die van hulpstelling II. Past men de aldus gewijzigde hulpstelling IV toe, dan wordt het gestelde bewezen.

Uit dit bewijs volgt tevens, dat de doorsnede eener begrensde, meetbare puntverzameling met een ruimte S slechts voor een verzameling waarden van x_n van de maat 0 niet meetbaar kan zijn. Beschouwt men n.l. de verzameling weer als verschil van een inwendige grensverzameling en een puntverzameling van de maat 0, dan is de doorsnede van de eerste steeds meetbaar, terwijl die van de laatste slechts voor een verzameling waarden van x_n van de maat 0 niet meetbaar kan zijn; en slechts, als deze laatste doorsnede niet meetbaar is, kan de doorsnede met de gegeven puntverzameling niet meetbaar zijn.

Om ten slotte de stelling voor een *niet-begrensde, meetbare puntverzameling* V te bewijzen, gaan wij als volgt te werk:

Zij A_k het interval, dat gegeven wordt door de betrekkingen:

$$-k \leqq x_p \leqq +k. \quad (p = 1, 2, \ldots . n).$$

Men heeft dan:

$$V = VA_1 + \sum_{k=1}^{k=\infty} V(A_{k+1} - A_k).$$

De puntverzamelingen, als welker som men V aldus kan schrijven, zijn begrensd en meetbaar, zoodat voor elk van hen de stelling geldt. Verder zijn hun doorsneden met een ruimte S meetbare $(n-1)$-dimensionale puntverzamelingen, (behalve eventueel voor een verzameling waarden van x_n van de maat 0.) Past men dus hulpstelling II toe, dan volgt hieruit de geldigheid der stelling voor V.

Uit de stelling, die wij thans bewezen hebben, volgt onmiddellijk de volgende stelling, die voor het geval $n=3$ in de stereometrie vaak toegepast wordt:

Stelling van Cavalieri: *Indien twee meetbare, n-dimensionale puntverzamelingen zoodanig zijn, dat hun doorsneden met eenzelfde ruimte $x_n = const.$ steeds dezelfde $(n-1)$-maat hebben, dan hebben de beide puntverzamelingen dezelfde n-maat.*

§ **127.** Wij zullen de stelling, die in de vorige § bewezen werd, toepassen op het speciale geval, dat de gegeven puntverzameling *een ordinaatverzameling is.* Hiertoe merken wij eerst op, dat men natuurlijk in plaats van ruimten $x_n =$ constant, evengoed ruimten $x_p =$ constant, (waarin p een der getallen $1, 2, \dots n$ is), kan beschouwen.

Beschouwen wij thans de ordinaatverzameling Ω eener meetbare functie $f(P)$, die op een n-dimensionale puntverzameling A gedefiniëerd is. Ω is dan zelf een $(n+1)$-dimensionale puntverzameling.

Zij S de verzameling der punten van R_{n+1}, waarvoor de coördinaat x_n een gegeven waarde heeft. De puntverzameling ΩS bestaat nu uit de ordinaten, die bij de punten der $(n-1)$-dimensionale puntverzameling AS behooren. Men heeft nu:

$$m\Omega_+ = \int_{R_1} (m\Omega_+ S)\, dx_n$$

$$m\Omega_- = \int_{R_1} (m\Omega_- S)\, dx_n$$

Bestaat de integraal van $f(P)$ over A, dan is van de beide getallen $m\Omega_+$ en $m\Omega_-$ minstens één eindig, wij zullen het geval beschouwen, dat $m\Omega_-$ eindig is. Volgens § 106 heeft dan de verzameling waarden van x_n, waarvoor $m\Omega_- S = +\infty$, de maat 0. A fortiori geldt dit voor de verzameling der waarden van x_n, waarvoor zoowel $m\Omega_+ S = +\infty$, als $m\Omega_- S = +\infty$. Is R'_1 de complementairverzameling dezer laatste puntverzameling, dan behouden de beide bovenstaande integralen dezelfde waarde, indien men R_1 door R'_1 vervangt.

Men heeft nu:

$$\int_A f(P)\,dV = m\Omega_+ - m\Omega_- = \int_{R'_1} (m\Omega_+ S - m\Omega_- S)\,dx_n.$$

Nu is echter $m\Omega_+ S - m\Omega_- S$ *niets anders dan de integraal van* $f(P)$ *over de* $(n-1)$*-dimensionale puntverzameling* AS. Om aan te duiden, dat voor de punten van AS de coördinaat x_n een gegeven waarde heeft, de andere coördinaten echter niet noodzakelijk constant zijn, zullen wij in het symbool, dat deze integraal voorstelt, het teeken dV vervangen door $dx_1\,dx_2 \ldots . dx_{n-1}$. De laatste formule kan dan als volgt worden geschreven:

$$\int_A f(P)\,dV = \int_{R'_1} dx_n \int_{AS} f(P)\,dx_1\,dx_2 \ldots . dx_{n-1}.$$

Door deze formule wordt de berekening der integraal over een n-dimensionale puntverzameling teruggebracht tot de berekening over een $(n-1)$-dimensionale puntverzameling, gevolgd door die van een integraal over een één-dimensionale.

Op de integraal over een puntverzameling AS kan men natuurlijk dezelfde reductie toepassen. Zet men dit voort, dan vindt men de volgende

Stelling: *Een integraal over een n-dimensionale puntverzameling kan worden verkregen door n-maal achter elkander een integraal over een één-dimensionale puntverzameling te bepalen.*

Bij elk dezer partiëele integraties kan men natuurlijk de puntverzameling, waarover geïntegreerd wordt, verminderen met de verzameling der punten, waar de te integreeren functie de waarde 0 heeft.

§ 129. Als toepassing van de laatst bewezen stelling bewijzen wij de

Stelling. *Zij* V *een meetbare, n-dimensionale puntverzameling, en zij* l *de verzameling der punten van* R_n, *waarvoor de coördinaten* x_1, x_2, x_{n-1} *gegeven waarden hebben. Is nu elke puntverzameling* Vl *een één-dimensionale puntverzameling van de maat 0, dan is* V *een n-dimensionale puntverzameling van de maat 0.*

Om de maat eener puntverzameling V te vinden, kan men ook de integraal over V berekenen eener functie, welke de constante waarde 1 heeft. Volgens de vorige § kan men dit als volgt uitvoeren:

Men integreert de genoemde functie eerst over een één-dimensionale puntverzameling l. De aldus gevonden integraal is een functie van de getallen $x_1, x_2, \ldots . x_{n-1}$. Men integreert deze nu over de één-dimensionale ruimte der waarden van x_{n-1}, terwijl men

de coördinaten $x_1, x_2, \ldots . x_{n-2}$ willekeurige, constante waarden geeft; de dan verkregen integraal is een functie van $x_1, x_2, \ldots . x_{n-2}$. Deze integreert men nu over de ruimte der waarden van x_{n-2}, enz.

In het geval, dat bij de formuleering der te bewijzen stelling omschreven wordt, heeft nu de integraal over een puntverzameling l de waarde 0. Hetzelfde geldt dan voor alle volgende integralen, dus ten slotte ook voor mV.

§ **130.** In het begin van dit hoofdstuk hebben wij de integraal van een functie gedefiniëerd als verschil van de maten van de beide ordinaatverzamelingen Ω_+ en Ω_-. Er bestaan nu verschillende definities, waarbij een integraal gedefiniëerd wordt als *limiet van een zekere som.* Wij zullen de voornaamste dezer definities bespreken (*niet* in historische volgorde).

In de eerste plaats bespreken wij de definitie van LEBESGUE.

Zij gegeven een *begrensde, meetbare* functie, welke wij beschouwen op een puntverzameling A van *eindige* maat. Laten g en G de onderste en bovenste grens van de waarden der functie op A zijn. Wij denken ons nu aan ieder natuurlijk getal k een verzameling van q getallen $a_{k,r}$ $(r=1, 2, \ldots . q)$ toegevoegd, die tusschen g en G gelegen zijn en naar opklimmende grootte gerangschikt, terwijl wij de getallen g en G door $a_{k,0}$ en $a_{k,q+1}$ aanduiden:

$$a_{k,0} = g < a_{k,1} < a_{k,2} < \ldots . < a_{k,q} < G = a_{k,q+1}.$$

Wij denken ons deze toevoeging verder zóó, dat bij toename van k het grootste der verschillen $(a_{k,r+1} - a_{k,r})$ tot 0 nadert. (Hiertoe is noodzakelijk, dat $\lim\limits_{k=\infty} q = +\infty$).

Zij $A_{k,r}$ de verzameling der punten P van A, waarvoor:

$$a_{k,r} \leqq f(P) < a_{k,r+1}.$$

Uit de meetbaarheid van $f(P)$ volgt, dat deze puntverzamelingen $A_{k,r}$ meetbaar zijn.

Zij verder $A_{k,q+1}$ de verzameling der punten P van A, waarvoor $f(P) = G$. Wij hebben nu de volgende

Stelling: *De integraal der functie $f(P)$ over A is de limiet van de som* $\sum\limits_{r=0}^{r=q+1} a_{k,r}\, mA_{k,r}$, *wanneer k de rij der natuurlijke getallen doorloopt.*

Zij n.l. $f_k(P)$ een functie, die in elk punt eener puntverzameling $A_{k,r}$ de waarde $a_{k,r}$ aanneemt. Zij P een punt van $A_{k,r}$, dan heeft men:

$$f(P) - f_k(P) = f(P) - a_{k,r} < a_{k,r+1} - a_{k,r}.$$

Neemt k toe, dan nadert dus het verschil $f_k(P) - f(P)$ tot nul, en men heeft:

$$f(P) = \lim_{k=\infty} f_k(P).$$

De functies $f_k(P)$ voldoen aan de voorwaarden van § 121.

Immers, de vereeniging hunner ordinaatverzamelingen is een deel van de vereeniging van 2 cylinders, die A tot basis hebben, terwijl de bijbehoorende getallen h respectievelijk g en G zijn. Men heeft dus:

$$\int_A f(P)\, dV = \lim \int_A f_k(P)\, dV.$$

Nu is echter:

$$\int_A f_k(P)\, dV = \sum_{r=0}^{r=q+1} a_{k,r}\, mA_{k,r},$$

waaruit de stelling volgt.

Niet zonder belang is het, op te merken, dat men ook heeft:

$$\int_A f(P)\, dV = \lim_{k=\infty} \left(\sum_{r=0}^{r=q} a_{k,r+1}\, mA_{k,r} + G\, mA_{k,q+1} \right).$$

Om dit aan te toonen, beschouwe men een functie $\varphi_k(P)$, die in elk punt eener puntverzameling $A_{k,r}$ de waarde $a_{k,r+1}$ aanneemt, en toone weer aan, dat $f(P) = \lim\limits_{k=\infty} \varphi_k(P)$.

Verder heeft men natuurlijk steeds:

$$\sum_{r=0}^{r=q+1} a_{k,r}\, mA_{k,r} \leqq \int_A f(P)\, dV \leqq \sum_{r=0}^{r=q} a_{k,r+1}\, mA_{k,r} + G\, mA_{k,q+1}.$$

§ 131. De grensovergang, die in de vorige § uitgevoerd is voor het geval van een *begrensde* functie op een puntverzameling van *eindige maat*, kan onder zekere beperkingen ook uitgevoerd worden, wanneer aan die voorwaarden niet voldaan is.

Wij onderstellen dus nu enkel de meetbaarheid van $f(P)$, en beschouwen nu afzonderlijk de functies $f_+(P)$ en $f_-(P)$.

In de eerste plaats de functie $f_+(P)$.

Zij aan elk natuurlijk getal k een verzameling van q positieve getallen $a_{k,r}$ $(r = 1, 2, \ldots q)$ toegevoegd, die naar opklimmende grootte gerangschikt zijn, terwijl wij $a_{k,0} = 0$ stellen:

$$a_{k,0} = 0 < a_{k,1} < \ldots < a_{k,q}.$$

Wij denken ons deze toevoeging verder zóó, dat bij toename van k het grootste der verschillen $a_{k,r+1} - a_{k,r}$ tot 0 nadert, terwijl de getallen $a_{k,q}$ een niet-begrensde getallenverzameling vormen. Verder onderstellen wij, dat de getallen $a_{k,r}$ alle tevens

behooren tot de verzameling der getallen $a_{k+1,r}$. De verzameling der getallen $a_{k+1,r}$ bestaat dus uit de verzameling der getallen $a_{k,r}$, benevens eventueel eenige daartusschen gevoegde getallen, en een of meer getallen, die grooter zijn dan $a_{k,q}$.

Zij $A_{k,r}$ $(r = 0, 1, \ldots, q-1)$ de verzameling der punten P van A, waarvoor:

$$a_{k,r} \leqq f_+(P) < a_{k,r+1}.$$

Zij verder $A_{k,q}$ de verzameling der punten P van A, waarvoor:

$$a_{k,q} \leqq f_+(P).$$

Zij $f_k(P)$ een functie, die in elk punt P eener puntverzameling $A_{k,r}$ de waarde $a_{k,r}$ aanneemt. Men heeft dan:

$$f_+(P) = \lim_{k=\infty} f_k(P).$$

Zij n.l. P een punt van A, waarvoor $f(P)$ eindig is. Vanaf een zekere index k is $a_{k,q} > f_+(P)$, en vanaf deze waarde van k is voor een zekere r:

$$f_+(P) - f_k(P) = f_+(P) - a_{k,r} \leqq a_{k,r+1} - a_{k,r},$$

en het laatste verschil nadert tot 0.

Is $f_+(P) = +\infty$, dan is voor elke waarde van k: $f_k(P) = a_{k,q}$, en dit heeft de limiet $+\infty$.

Verder heeft men:

$$f_{k+1}(P) \geqq f_k(P).$$

Dit volgt hieruit, dat $f_k(P)$ gelijk is aan het grootste der getallen $a_{k,r}$, die niet grooter zijn dan $f_+(P)$, terwijl elk getal $a_{k,r}$ tevens een getal $a_{k+1,r}$ is. Volgens § 119 heeft men dus:

$$\int_A f_+(P)\,dV = \lim_{k=\infty} \int_A f_k(P)\,dV$$

$$= \lim_{k=\infty} \sum_{r=1}^{r=q} a_{k,r}\, mA_{k,r}.$$

Op dezelfde wijze als de functie $f_+(P)$ kunnen wij ook de functie $f_-(P)$ beschouwen. Wij voegen dan aan elk natuurlijk getal k een verzameling van $q+1$ getallen $b_{k,q}$ toe, aldus:

$$b_{k,0} = 0 > b_{k,1} > \ldots\ldots > b_{k,q}.$$

Deze verzamelingen van getallen $b_{k,r}$ voldoen verder aan dezelfde onderstellingen, die wij omtrent de verzamelingen der getallen $a_{k,r}$ hebben gemaakt. Zij verder $B_{k,r}$ de verzameling der punten van A, waarvoor:

$$b_{k,r} \geqq f(P) > b_{k,r+1} \quad (r = 0,\ 1, \ldots\, q-1).$$

Zij verder $b_{k,q}$ de verzameling der punten, waarvoor $b_{k,q} \geqq f_-(P)$.

Wij definiëeren nu een functie $\phi_k(P)$, die in elk punt eener puntverzameling $B_{k,r}$ de waarde $b_{k,r}$ aanneemt. Men heeft dan weer:

$$f_-(P) = \lim_{k=\infty} \phi_k(P)$$

$$\phi_{k+1}(P) \leqq \phi_k(P),$$

dus:

$$\int_A f_-(P)\, dV = \lim_{k=\infty} \int_A \phi_k(P)\, dV =$$

$$= \lim_{k=\infty} \sum_{r=1}^{r=q} b_{k,r}\, mB_{k,r}.$$

Bestaat de integraal van $f(P)$ over A, dan volgt uit het voorafgaande:

$$\int_A f(P)\, dV = \lim_{k=\infty} \left\{ \sum_{r=1}^{r=q} a_{k,r}\, mA_{k,r} + \sum_{r=1}^{r=q} b_{k,r}\, mB_{k,r} \right\}.$$

Is de functie $f(P)$ over A *sommeerbaar*, zoodat de integralen van $f_+(P)$ en van $f_-(P)$ eindig zijn, dan behoeft men niet de onderstelling te maken, dat elk getal $a_{k,r}$ tevens een getal $a_{k+1,r}$ en elk getal $b_{k,r}$ tevens een getal $b_{k+1,r}$ is. Immers, men kan dan de stelling van § 121 toepassen, zoodat de functierijen $f_k(P)$ en $\phi_k(P)$ dan niet monotoon behoeven te wezen.

§ 132. Ten einde een tweede integraaldefinitie te kunnen behandelen, moeten wij eerst een nieuw begrip invoeren. Zij op een puntverzameling A een functie $f(P)$ gegeven. Zij Q een *punt* of *verdichtingspunt* van A. Wij beschouwen een rij van gesloten intervallen I_k $(k = 1, 2, \ldots.)$, welke de volgende eigenschappen bezit:

1⁰. Alle intervallen I_k hebben Q tot inwendig punt.

2⁰. Elk interval I_k is een deel van alle voorafgaande.

3². Doorloopt k de rij der natuurlijke getallen, dan heeft de grootste lengte van het interval I_k tot limiet 0.

Zij G_k de bovenste grens van de waarden der functie $f(P)$ in de punten der puntverzameling AI_k, en zij g_k de onderste grens dezer waarden.

Daar de puntverzameling AI_{k+1} een deel is van AI_k en hetzelfde dus geldt voor de bijbehoorende verzamelingen van functiewaarden, is $G_{k+1} \leqq G_k$ en $g_{k+1} \geqq g_k$. De rij der getallen G_k heeft dus een limiet L en de rij der getallen g_k heeft een limiet l, en wel is $L \geqq l$.

Gebruikt men een andere rij van intervallen, welke aan dezefde onderstellingen voldoet als de rij der I_k, dan verkrijgt men dezelfde getallen L en l. Zij n.l. I'_k een dergelijke rij. Zij k_1 een

willekeurige waarde van de index k. Men kan dan een index k_2 vinden zóódanig, dat het interval I'_{k_2} een deel is van het interval I_{k_1}. Vervolgens kan men een index k_3 vinden zóódanig, dat het interval I_{k_3} een deel is van I'_{k_2}. Voor de bijbehoorende bovenste grenzen van functiewaarden heeft men dan:

$$G_{k_1} \geqq G'_{k_2} \geqq G_{k_3}.$$

Elk getal G'_k ligt dus tusschen 2 der getallen G_k, en evenzoo elk getal G_k tusschen 2 getallen G'_k. Hieruit volgt, dat de beide rijen der getallen G_k en G'_k dezelfde limiet L hebben. Evenzoo hebben de beide rijen g_k en g'_k dezelfde limiet l.

De getallen L en l heeten respectievelijk de **bovenste limiet** en de **onderste limiet** van de functie $f(P)$ in het punt Q. Daar aan elk punt of verdichtingspunt van A op deze wijze een getal L en een getal l zijn toegevoegd, verkrijgt men op de verzameling dezer punten een functie $L(Q)$ en een functie $l(Q)$.

Is Q een punt, dat zelf tot A behoort, zoodat het getal $f(Q)$ bestaat, dan heeft men voor elke waarde van k:

$$g_k \leqq f(Q) \leqq G_k,$$

dus:

$$l(Q) \leqq f(Q) \leqq L(Q).$$

Is $l(Q) = f(Q) = L(Q)$, en zijn deze getallen eindig, dan is de functie $f(P)$ in het punt Q *continu*. Zij n.l. ε een willekeurig, positief getal. Men kan dan een index k vinden, zóódanig, dat:

$$G_k - f(Q) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ en } f(Q) - g_k < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Voor elk punt P van de bijbehoorende puntverzameling AI_k heeft men dan:

$$| f(P) - f(Q) | < \varepsilon$$

en hieruit volgt de continuïteit. Is omgekeerd de functie in het punt Q continu, dan is $l(Q) = f(Q) = L(Q)$. Men bewijst n.l. gemakkelijk, dat voor ieder positief getal ε geldt, dat $L(Q) - l(Q) \leqq \varepsilon$.

Is in een punt Q: $L(Q) = f(Q)$, dan heet de functie $f(P)$ in het punt Q **semi-continu naar boven.**

Is $l(Q) = f(Q)$, dan heet de functie $f(P)$ in Q **semi-continu naar beneden.**

§ 133. Zij thans een *begrensde* functie $f(P)$ gegeven op een *begrensde* meetbare puntverzameling A. Wij beschouwen een rij van netten N_k ($k = 1, 2, \ldots.$), waarvan ieder een onderverdeeling is van alle voorafgaande, en die voldoen aan de onderstellingen, welke wij volgens hoofdstuk I steeds omtrent zulk een rij zouden maken.

Zij $q(k)$ het aantal der intervallen van het net N_k. Wij zullen deze intervallen aanduiden door $I_{k,r}$ $(r = 1, 2, \ldots . q(k))$.

Zij $A_{k,r} = A I_{k,r}$. Zij $G_{k,r}$ de bovenste grens van de waarden der functie $f(P)$ in de punten der verzameling $A_{k,r}$. Daar $f(P)$ begrensd is, zijn de getallen $G_{k,r}$ eindig, en wel heeft men, als g en G de onderste en bovenste grens van $f(P)$ op A zijn:

$$g \leqq G_{k,r} \leqq G.$$

Zij $I'_{k,r}$ het open interval, dat door de *inwendige* punten van het interval $I_{k,r}$ wordt gevormd, en zij $A'_{k,r} = A I'_{k,r}$.

Zij $B_{k,r} = A_{k,r} - A'_{k,r}$, en zij B de vereeniging van alle puntverzamelingen $B_{k,r}$ (voor alle waarden van de indices k en r). Zij ten slotte $A' = A - B$. Een punt P van A' behoort dan voor elke waarde van den index k tot een puntverzameling $A'_{k,r}$, en is dus inwendig punt van een interval $I_{k,r}$.

Een puntverzameling $B_{k,r}$ heeft de maat 0, daar zij een deel is van de begrenzing van een n-dimensionaal interval. Daar het aantal puntverzamelingen $B_{k,r}$ *aftelbaar* oneindig is heeft ook hun vereeniging B de maat 0, en heeft A' dezelfde maat als A.

Bij elke waarde van den index k definiëeren wij nu op A een functie $f_k(P)$. Deze zal in een punt P, dat tot een puntverzameling $A'_{k,r}$ behoort, de waarde $G_{k,r}$ hebben, in elk ander punt van A de waarde 0. Men heeft dan:

$$\int_A f_k(P)\, dV = \sum_{r=1}^{r=q(k)} G_{k,r}\, m A'_{k,r}.$$

Zij Q een punt van de puntverzameling A'. De intervallen $I_{k,r}$ uit de opeenvolgende netten, die Q tot inwendig punt hebben, vormen een rij intervallen, die aan de voorwaarden van § 132 voldoen. De limiet der bijbehoorende getallen $G_{k,r}$ is dus gelijk aan de bovenste limiet $L(Q)$ der functie $f(P)$ in het punt Q. Men heeft dus ook:

$$\lim_{k=\infty} f_k(Q) = L(Q).$$

In een punt van B is $\lim\limits_{k=\infty} f_k(P) = 0$.

Uit het feit, dat de puntverzameling A en de functie $f(P)$ begrensd zijn, volgt, dat de ordinaatverzamelingen der functies $f_k(P)$ deelverzamelingen zijn van een zeker $(n+1)$-dimensionaal interval, en deze functies dus voldoen aan de voorwaarden van § 121. Hieruit volgt:

$$\lim_{k=\infty} \int_A f_k(P)\, dV = \int_A \lim_{k=\infty} f_k(P)\, dV.$$

Nu verschilt de functie $\lim\limits_{k=\infty} f_k(P)$ alleen in de punten van B,

dat is van een puntverzameling van de maat 0, van de functie $L(P)$. Haar integraal is dus gelijk aan $\int_A L(P)\,dV$.

Men heeft dus:

$$\lim_{k=\infty} \sum_{r=1}^{r=q(k)} G_{k,r}\, mA'_{k,r} = \int_A L(P)\,dV.$$

Deze grootheid heet de **bovenintegraal van Darboux** der functie $f(P)$ over de puntverzameling A.

Evenzoo bewijst men:

$$\lim_{k=\infty} \sum_{r=1}^{r=q(k)} g_{k,r}\, mA'_{k,r} = \int_A l(P)\,dV.$$

Deze grootheid heet de **benedenintegraal van Darboux** van $f(P)$ over A.

Zijn de bovenintegraal en de benedenintegraal eener functie $f(P)$ over een puntverzameling A aan elkander gelijk, dan heet de functie $f(P)$ over A **integrabel volgens Riemann.** Hiertoe is dus noodzakelijk en voldoende, dat:

$$\int_A \{L(P) - l(P)\}\,dV = 0.$$

Daar de functie $L(P) - l(P)$ geen negatieve waarde aanneemt, heeft volgens § 107 de verzameling der punten van A, waar deze functie positief is, de maat nul; omgekeerd is dit voor het 0-zijn van de integraal voldoende. De genoemde punten zijn nu juist de punten, waar $f(P)$ discontinu is. Men heeft dus de volgende

Stelling: *Opdat een functie $f(P)$ over een puntverzameling A integrabel is volgens Riemann, is noodzakelijk en voldoende, dat de verzameling der punten van A, waar $f(P)$ discontinu is, de maat 0 heeft.*

In elk geval heeft men:

$$l(P) \leqq f(P) \leqq L(P).$$

Dus volgens § 108:

$$\int_A l(P)\,dV \leqq \int_A f(P)\,dV \leqq \int_A L(P)\,dV.$$

De integraal eener functie ligt dus steeds in tusschen de benedenintegraal en de bovenintegraal. Is de functie integrabel volgens Riemann, dan zijn de drie genoemde integralen aan elkander gelijk.

Is de functie semi-continu naar boven, dan is $f(P) = L(P)$, en is haar integraal gelijk aan haar bovenintegraal. Is de functie

semi-continu naar beneden, dan is haar integraal gelijk aan haar benedenintegraal.

§ 134. Wij kunnen de resultaten van de vorige § nog iets uitbreiden. Zij weer een begrensde functie $f(P)$ gegeven op een begrensde, meetbare puntverzameling A. Wij denken ons aan ieder natuurlijk getal k een verzameling van eindig vele puntverzamelingen $A'_{k,r}$ toegevoegd; zij $q(k)$ het aantal dezer puntverzamelingen. Omtrent deze puntverzamelingen $A'_{k,r}$ maken wij de volgende onderstellingen:

1⁰. De puntverzamelingen $A'_{k,r}$, die bij eenzelfde waarde van k behooren, hebben 2 aan 2 geen punt gemeen; de som dezer puntverzamelingen is gelijk aan het verschil van A en van een puntverzameling B_k *van de maat 0:*

$$\sum_{r=1}^{r=q(k)} A'_{k,r} = A - B_k.$$

2⁰. Elke puntverzameling $A'_{k,r}$ is de doorsnede van A met een *open* puntverzameling $U_{k,r}$.

3⁰. Is ε een positief getal, dan kan men steeds een index k_0 vinden, zoodanig, dat voor $k \geqq k_0$ elk der puntverzamelingen $A'_{k,r}$ een deel is van een interval, waarvan de grootste lengte kleiner dan ε is.

Wij definiëeren nu bij elk natuurlijk getal k een functie $f_k(P)$ door de volgende definities:

1⁰. de waarde van $f_k(P)$ in een punt van B_k is nul.

2⁰. de waarde van $f_k(P)$ in een punt, dat tot een puntverzameling $A'_{k,r}$ behoort, is gelijk aan de bovenste grens $G_{k,r}$ van de waarden der functie $f(P)$ in de punten van $A'_{k,r}$.

Men heeft dan:

$$\int_A f_k(P)\, dV = \sum_{r=1}^{r=q(k)} G_{k,r}\, mA'_{k,r}.$$

Men verkrijgt zoo een rij van functies $f_k(P)$. Wij zullen aantoonen, dat, wanneer P een punt is, dat voor elke waarde van k tot een puntverzameling $A'_{k,r}$ behoort, het volgende geldt:

$$\lim_{k=\infty} f_k(P) = L(P),$$

waarin $L(P)$ de bovenste limiet van de functie $f(P)$ in het punt P is. Daar de vereeniging B van alle puntverzamelingen B_k de maat 0 heeft, vormen de genoemde punten een puntverzameling $A - B$, waarvan de maat gelijk is aan die van A.

Zij dus P een zoodanig punt. Wij beschouwen een rij van intervallen I_m, die P tot middelpunt hebben, waarvan elk een

deel van alle voorafgaande is en waarvan de grootste lengte tot 0 nadert bij toename van m. Zij G_m de bovenste grens van de waarden der functie $f(P)$ in de punten van de puntverzameling AI_m. Volgens § 132 is de limiet van de rij der getallen G_m het getal $L(P)$.

Zij nu $A'_{k,r}$ een puntverzameling, die P bevat. Men kan dan een index m' vinden zoodanig, dat het interval $I_{m'}$, een deel is van de, bij $A'_{k,r}$ behoorende, puntverzameling $U_{k,r}$. De puntverzameling $AI_{m'}$ is dan een deel van $A'_{k,r} = AU_{k,r}$, zoodat $G_m \leqq G_{k,r}$.

Verder kan men een index m'' vinden zoodanig, dat $A'_{k,r}$ een deel is van $I_{m''}$; dit is mogelijk, zoodra de index k grooter is dan de index k_0, die behoort bij het getal ε, dat gelijk is aan de helft van de kleinste lengte van het interval I_1. $A'_{k,r}$ is dan een deel van $AI_{m''}$ en dus is $G_{k,r} \leqq G_{m''}$.

Is k grooter dan de index k_0, die behoort bij het getal ε, dat gelijk is aan de helft van de kleinste lengte van het interval I_s, dan kan men de index $m'' \geqq s$ nemen. Hieruit volgt, dat, wanneer wij de index m'' telkens zoo groot mogelijk nemen, deze index bij toename van k elk bedrag ten slotte overschrijdt. Men heeft dus $\lim\limits_{k=\infty} G_{m'} = \lim\limits_{k=\infty} G_{m''} = L(P)$. Hieruit volgt:

$$\lim_{k=\infty} G_{k,r} = L(P).$$

Uit het feit, dat de puntverzameling A en de functie $f(P)$ begrensd zijn, volgt, dat de ordinaatverzamelingen der functies $f_k(P)$ deelverzamelingen zijn van een begrensde, $(n+1)$-dimensionale puntverzameling, welke de vereeniging is van 2 cylinders. Men heeft dus:

$$\int\limits_{A-B} L(P)\,dV = \lim_{k=\infty} \int\limits_{A-B} f_k(P)\,dV.$$

Daar de puntverzameling B de maat 0 heeft, is de integraal eener functie over $A - B$ dezelfde als over A. Men heeft dus:

$$\int\limits_A L(P)\,dV = \lim_{k=\infty} \int\limits_A f_k(P)\,dV$$

$$= \lim_{k=\infty} \sum_{r=1}^{r=q(k)} G_{k,r}\, mA'_{k,r}.$$

De laatstgenoemde limiet is dus weer gelijk aan de bovenintegraal van $f(P)$. Evenzoo bewijst men:

$$\int\limits_A l(P)\,dV = \lim_{k=\infty} \sum_{r=1}^{r=q(k)} g_{k,r}\, mA'_{k,r}.$$

§ **135.** Is in het bijzonder een begrensde functie $f(P)$ *integrabel volgens Riemann* over een begrensde, meetbare puntverzameling A, dan kunnen de uitkomsten van de vorige § nog iets worden uitgebreid.

Wij voegen weer aan ieder natuurlijk getal k een verzameling van $q(k)$ puntverzamelingen $A'_{k,r}$ toe. *Deze behoeven nu uitsluitend te voldoen aan de onderstellingen 1⁰. en 3⁰. der vorige §.*

Wij definiëeren weer bij elk natuurlijk getal k een functie $f_k(P)$ door dezelfde 2 definities als in de vorige §. Zij P een punt, dat tot de puntverzameling $A - B$ behoort, en waarin de functie $f(P)$ *continu* is. Wij beschouwen weer een rij intervallen I_m, die P tot middelpunt hebben, waarvan elk een deel van alle voorafgaande is, en waarvan de grootste lengte tot 0 nadert bij toename van m. Uit de continuïteit van $f(P)$ volgt dan:

$$\lim_{m=\infty} G_m = \lim_{m=\infty} g_m = f(P).$$

Men kan weer bij elk getal k, dat groot genoeg is, een index m'' vinden zóódanig, dat de puntverzameling $A'_{k,r}$, die P bevat, een deel is van het interval $I_{m''}$; en wel zóódanig, dat

$$\lim_{k=\infty} m'' = +\infty.$$

De waarden van $f(P)$ in de punten van $A'_{k,r}$ behooren nu tot het interval $g_{m''} \leqq x \leqq G_{m''}$; men heeft dus ook:

$$g_{m''} \leqq g_{k,r} \leqq G_{k,r} \leqq G_{m''}.$$

Hieruit volgt:

$$\lim_{k=\infty} g_{k,r} = \lim_{k=\infty} G_{k,r} = f(P).$$

Voor elk punt P van $A - B$, waar $f(P)$ continu is, heeft men dus:

$$\lim_{k=\infty} f_k(P) = f(P).$$

Uit de integrabiliteit der functie $f(P)$ volgens Riemann volgt nu, dat deze punten een verzameling C vormen, die zich van $A - B$ alleen door een puntverzameling van de maat 0 onderscheidt, dus ook van A. Hieruit volgt:

$$\int_A \overline{f(P)}\, dV = \lim_{k=\infty} \int_A f_k(P)\, dV$$

$$= \lim_{k=\infty} \sum_{r=1}^{r=q(k)} G_{k,r}\, mA'_{k,r}$$

$$= \lim_{k=\infty} \sum_{r=1}^{r=q(k)} g_{k,r}\, mA'_{k,r}.$$

Iets algemeener heeft men nog, als $y_{k,r}$ een getal is zoodanig, dat $g_{k,r} \leqq y_{k,r} \leqq G_{k,r}$:

$$\int_A f(P)\, dV = \lim_{k=\infty} \sum_{r=1}^{r=q(k)} y_{k,r}\, mA'_{k,r}.$$

§ 136. Bij de elementaire uiteenzetting van het begrip „bepaalde integraal" beschouwt men in de eerste plaats een *begrensde* functie $f(P)$, die integrabel is volgens Riemann over een *begrensde*, meetbare puntverzameling A. Men beschouwt een verzameling van puntverzamelingen $A'_{k,r}$, die aan de voorwaarden van de vorige § voldoen, en *definiëert* nu de integraal van $f(P)$ over A, als de gemeenschappelijke limiet der uitdrukkingen

$$\sum_{r=1}^{r=q(k)} g_{k,r}\, mA'_{k,r} \quad \text{en} \quad \sum_{r=1}^{r=q(k)} G_{k,r}\, mA'_{k,r}.$$

Bewezen moet hierbij natuurlijk worden, dat deze limieten bestaan, aan elkander gelijk zijn, en onafhankelijk zijn van de bijzondere keuze der puntverzamelingen $A'_{k,r}$.

Is de puntverzameling A *niet begrensd*, dan beschouwt men een convergente rij van puntverzamelingen A_k $(k = 1, 2, \ldots.)$, waarvan A de limiet is en *definiëert* nu de integraal over A door de betrekking:

$$\int_A f(P)\, dV = \lim_{k=\infty} \int_{A_k} f(P)\, dV,$$

wanneer deze limiet bestaat en tot op zekere hoogte van de bijzondere keuze der puntverzamelingen A_k onafhankelijk is.

Bestaat de integraal van $f(P)$ over A, zooals wij deze in dit werk definiëeren, en kiest men de puntverzamelingen A_k zóódanig, dat voldaan wordt aan de onderstellingen van § 113, § 117, § 118 of § 119, dan komt men op deze wijze tot dezelfde uitkomsten als met behulp van de definitie, waarvan wij zijn uitgegaan. Het is echter ook mogelijk, dat de genoemde limiet een bepaalde waarde heeft, terwijl toch, (volgens het in dit werk ingenomen standpunt) gezegd moet worden, dat de integraal van $f(P)$ over A *niet* bestaat. Als voorbeeld diene het volgende:

Laten a en b eindige getallen zijn, en zij

$$\int_b^a f(x)\, dx$$

de integraal der functie $f(x)$ over het één-dimensionale interval $a \leqq x \leqq b$. Zij A de verzameling der punten, waarvoor $a \leqq x$.

De integraal van $f(x)$ over A wordt nu voorgesteld door $\int_a^\infty f(x)\,dx$, en in de elementaire theorie gedefiniëerd door de formule:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b=\infty} \int_a^b f(x)\,dx,$$

wanneer deze limiet bestaat.

Neemt men nu $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, dan volgt uit deze definitie een bepaalde waarde voor de integraal dezer functie over A.

Toch moet, volgens het in dit werk ingenomen standpunt, gezegd worden, dat de integraal van deze functie $f(x)$ over A niet bestaat; immers, zoowel de ordinaatverzameling Ω_+, als de ordinaatverzameling Ω_- hebben een oneindig groote maat. Het bewijs laten wij aan den lezer over.

Zal de genoemde definitie tot dezelfde uitkomsten leiden als de in dit werk afgeleide, dan moet de integraal $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *absoluut convergeeren*, d. w. z. zoowel $\int_a^\infty f_+(x)\,dx$ als $\int_a^\infty f_-(x)\,dx$ moeten eindige waarden hebben.

Analoge opmerkingen kan men maken voor het geval, dat de *functie* $f(P)$ *niet begrensd* is.

HOOFDSTUK VI.

Onbepaalde Integralen.

§ **137.** In hoofdstuk I hebben wij de volgende definitie gegeven:

Zij volgens een zekere wet aan ieder punt P eener puntverzameling A een getal $f(P)$ toegevoegd. Wij zeggen dan, dat op A een functie gedefiniëerd is; het getal $f(P)$ noemen wij de waarde van de functie in het punt P. In overeenstemming hiermede geven wij nu de volgende definitie:

Zij gegeven een verzameling $\}A\{$ van puntverzamelingen A. Zij volgens een zekere wet aan elk dezer verzamelingen A een (eindig of oneindig) getal toegevoegd. Wij zullen dan zeggen, dat op de verzameling $\}A\{$ een **verzamelingsfunctie** gedefiniëerd is. Het getal, dat aan een bepaalde puntverzameling A is toegevoegd, en dat wij aanduiden door een teeken als $F(A)$, heet de waarde der verzamelingsfunctie voor de puntverzameling A. In plaats van: „de verzamelingsfunctie, welker waarde voor een puntverzameling A door $F(A)$ wordt aangeduid", zullen wij kortweg zeggen: „de verzamelingsfunctie $F(A)$."

Een functie, zooals wij die tot nu toe hebben beschouwd, die dus in ieder punt van een zekere puntverzameling een bepaalde waarde bezit, noemen wij een **puntfunctie**. Zoowel een puntfunctie, als een verzamelingsfunctie zullen wij kortweg een „functie" noemen, indien omtrent de bedoeling geen twijfel bestaan kan.

Een zeer belangrijke verzamelingsfunctie is de *maat*. Aan elke puntverzameling eener ruimte R_n toch is een bepaald getal als maat toegevoegd. De verzameling $\}A\{$ bestaat in dit geval uit alle puntverzamelingen der ruimte R_n.

Een tweede, belangrijk voorbeeld eener verzamelingsfunctie is het volgende:

Zij een puntfunctie $f(P)$ gegeven, die meetbaar is op een puntverzameling V en laat de integraal van $f(P)$ over V bestaan. Volgens § 110 bestaat dan ook de integraal van $f(P)$ over elke meetbare deelverzameling A van V. Voegen wij nu aan elk dezer deelverzamelingen de waarde van de genoemde integraal toe, dan verkrijgt men een verzamelingsfunctie. De verzameling $\}A\{$ bestaat nu uit alle meetbare deelverzamelingen van V.

§ 138. Aan het slot van de vorige § hebben wij een verzamelingsfunctie verkregen, door aan elke meetbare deelverzameling A eener meetbare puntverzameling V de waarde toe te voegen van de integraal eener puntfunctie $f(P)$ over A. Ondersteld werd hierbij, dat de integraal van $f(P)$ over V bestond.

Een aldus verkregen verzamelingsfunctie heet een **onbepaalde integraal**. De waarde dezer functie voor een bepaalde puntverzameling A heet een **bepaalde integraal;** dit is dus een integraal, zooals we die in het vorige hoofdstuk hebben bestudeerd. Het verschil tusschen „onbepaalde integraal" en „bepaalde integraal" is dus hetzelfde als tusschen „functie" en „waarde eener functie."

Wij zullen in het vervolg, als wij over onbepaalde integralen spreken, steeds de beide volgende onderstellingen maken:

1⁰. De puntverzameling V, voor welker meetbare deelverzamelingen de functie gedefiniëerd is, is *open.*

2⁰. De puntfunctie $f(P)$ is *sommeerbaar* over V. Zij is dan ook sommeerbaar over elke meetbare deelverzameling van V, zoodat de waarden der verkregen verzamelingsfunctie alle eindig zijn.

§ 139. Een verzamelingsfunctie $F(A)$ heet **additief,** indien voldaan is aan de volgende onderstelling:

Is een puntverzameling A de som van 2 puntverzamelingen A_1 en A_2, voor elk waarvan de functie gedefiniëerd is, dan is:

$$F(A_1 + A_2) = F(A_1) + F(A_2).$$

Door volledige inductie vindt men, dat dan ook voor een *eindig* aantal puntverzamelingen A_k geldt:

$$F(\Sigma A_k) = \Sigma F(A_k),$$

indien elk der termen in het rechterlid gedefiniëerd is.

Geldt de laatste betrekking ook, indien het aantal der puntzamelingen A_k *aftelbaar oneindig* is, dan heet de verzamelingsfunctie **volkomen additief.**

Een verzamelingsfunctie, die wèl additief, doch niet volkomen additief is, is bijv. de uitwendige maat volgens JORDAN; deze beschouwen wij dan voor alle begrensde puntverzamelingen eener ruimte R_n, die volgens JORDAN meetbaar zijn.

Uit de stelling van § 114 volgt nu onmiddellijk:

Stelling. *Een onbepaalde integraal is een volkomen additieve verzamelingsfunctie.*

§ 140. Een verzamelingsfunctie $F(A)$ heet **continu,** indien voldaan is aan de volgende veronderstelling:

Bij elk positief getal ε kan men een positief getal δ vinden zoodanig, dat:

$$| F(A) | < \varepsilon,$$

zoodra de puntverzameling A een deel is van een n-dimensionale kubus, waarvan de maat kleiner dan δ is.

Een verzamelingsfunctie $F(A)$ heet **absoluut continu,** indien voldaan is aan de volgende onderstelling:

Bij elk positief getal ε kan men een positief getal δ vinden zoodanig, dat:

$$| F(A) | < \varepsilon,$$

indien de *maat* van A kleiner is dan δ.

Een verzamelingsfunctie, die wel continu, doch niet absoluut continu is, is bijv. de uitwendige maat volgens JORDAN. Aan de voorwaarde van de continuïteit wordt voldaan, indien men δ gelijk aan ε neemt. Dat deze functie niet absoluut continu is, volgt hieruit, dat zij een positieve waarde kan hebben voor een puntverzameling, waarvan de maat (volgens BOREL) nul is.

Uit de stelling van § 116 volgt nu:

Stelling. *Een onbepaalde integraal is een absoluut continue verzamelingsfunctie.*

Hierbij worden omtrent deze onbepaalde integraal de beide onderstellingen gemaakt, die aan het slot van § 137 genoemd zijn.

§ 141. Van groot belang is nu, dat men de beide stellingen van de 2 vorige §§ kan *omkeeren* tot de

Stelling. *Een verzamelingsfunctie, die gedefinieerd en eindig is voor alle meetbare deelverzamelingen eener open puntverzameling V, en die volkomen additief en absoluut continu is, is een onbepaalde integraal.*

Onze ontwikkelingen zullen in de eerste plaats ten doel hebben, deze stelling te bewijzen.

§ 142. Zij gegeven een verzamelingsfunctie $F(A)$, die voor alle meetbare deelverzamelingen eener meetbare puntverzameling V gedefinieërd is. Wij beschouwen een rij van netten N_k, die de ruimte R_n overdekken, en die voldoen aan de voorwaarden, welke wij volgens Hoofdstuk I aan zulk een rij van netten zouden opleggen.

Zij P een punt, dat aan de drie volgende voorwaarden voldoet:

1°. Voor elke waarde van den index k is P een inwendig punt van een interval I_k uit het net N_k.

2°. P is een punt of een verdichtingspunt van de puntverzameling V.

3^0. Voor geen enkele waarde van den index k is de maat van de puntverzameling VI_k gelijk aan nul.

Bij elke waarde van den index k is de puntverzameling VI een deel van V, en is dus het getal $F(VI_k)$ gedefiniëerd.

Wij beschouwen nu de rij der getallen:

$$g_k = \frac{F(VI_k)}{m(VI_k)},$$

waarin $m(VI_k)$ de maat van de puntverzameling VI_k is.

Volgens Hoofdstuk I heeft deze rij getallen een bovenste en een onderste limiet. Deze beide limieten noemen wij respectievelijk de **bovenste afgeleide** en de **benedenste afgeleide** van de functie $F(A)$ *in het punt* P ten opzichte van de rij netten N_k.

Deze beide afgeleiden hebben bepaalde waarden, (welke eventueel $+\infty$ en $-\infty$ zijn), in elk punt P, dat aan de drie genoemde onderstellingen voldoet. Men verkrijgt aldus 2 puntfuncties, die op de verzameling dezer punten P gedefiniëerd zijn. Deze beide *puntfuncties* heeten respectievelijk de *bovenste afgeleide* en de *benedenste afgeleide* van de *verzamelingsfunctie* $F(A)$ ten opzichte van de rij netten N_k. De lezer toone met behulp van § 91 aan, dat deze functies *meetbaar* zijn.

§ **143**. Zij thans $F(A)$ een verzamelingsfunctie, die gedefiniëerd is voor alle meetbare deelverzamelingen eener open puntverzameling V en die volkomen additief en absoluut continu is. Wij bewijzen nu eerst de volgende

Stelling: *Indien in elk punt eener meetbare deelverzameling B van V de bovenste afgeleide van $F(A)$ gedefiniëerd en grooter is dan een vast, eindig getal a, dan is $F(B) \geqq amB$.*

Zij ε een willekeurig gekozen, positief getal. Men kan dan een open puntverzameling V' vinden, die B bevat en zóódanig is, dat $mV' < mB + \varepsilon$. Zij $U = VV'$, dan zal ook U de puntverzameling B bevatten en men heeft:

$$mB \leqq mU < mB + \varepsilon.$$

Wij beschouwen eerst het geval, dat mB eindig is.

Daar U en B meetbaar zijn, volgt hieruit dan:

$$m(U - B) = mU - mB < \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Zij η een willekeurig, positief getal. Wegens de absolute continuïteit van $F(A)$ kan men bij het getal η het getal ε zóódanig bepalen, dat uit de betrekking (1) volgt:

$$|F(U - B)| < \eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Beschouwen wij thans de rij van netten N_k, met behulp waarvan de bovenste afgeleide, waarvan in het gestelde sprake is, gedefiniëerd is. Zij P een punt van B, en laten wij de intervallen I_k uit de opeenvolgende netten N_k beschouwen, welke P tot inwendig punt hebben.

Daar P tot de open puntverzameling U behoort, zullen de intervallen I_k vanaf een zekeren index k_0 geheel tot U behooren, dus ook tot V. Voor alle indices k, die grooter dan k_0 zijn, kan men voor de getallen g_k van § 142 schrijven:

$$g_k = \frac{F(I_k)}{mI_k}.$$

Daar de bovenste limiet dezer rij getallen g_k grooter is dan a, kan men een oneindig aantal indices k vinden, die $> k_0$ zijn, en waarvoor:

$$g_k > a,$$

waaruit volgt:

$$F(I_k) > amI_k \quad \dots \dots \dots \quad (3)$$

Uit het net N_1 kiezen wij nu alle intervallen uit, die geheel tot U behooren, en voldoen aan de betrekking $F(I) > amI$.

Uit het net N_2 kiezen wij de intervallen, die aan dezelfde 2 voorwaarden voldoen, en geen deel zijn van een interval, dat reeds uit het net N_1 is uitgekozen. Zoo kiezen wij uit elk net N_k de intervallen uit, die aan de 2 genoemde voorwaarden voldoen, en geen deel zijn van een interval, dat reeds uit een voorafgaand net is uitgekozen.

De inwendige punten van de intervallen, die wij aldus uitkiezen, vormen een puntverzameling W. Deze is blijkbaar een deel van U. Uit het bovenstaande volgt verder, dat elk punt P van B een inwendig punt is van een uitgekozen interval; dit is het eerste interval I_k, welks index $\geqq k_0$ is, en dat aan de voorwaarde (3) voldoet, of wel een interval waarvan het genoemde een deel is. De puntverzameling W bevat dus B. Men heeft dus:

$$m(B) \leqq m(W) \leqq m(U),$$

waaruit volgt:

$$m(W - B) \leqq m(U - B) < \varepsilon \quad \dots \dots \quad (4)$$

En hieruit volgt weer:

$$|F(W - B)| < \eta \quad \dots \dots \dots \quad (5)$$

Uit de absolute continuïteit van $F(A)$ volgt, dat deze functie voor elke puntverzameling van de maat 0 de waarde 0 heeft; immers, deze waarde moet, volstrekt genomen, kleiner zijn dan ieder positief getal. Wegens de additiviteit is dus de waarde van $F(A)$ voor een gesloten interval dezelfde als voor het open

interval, dat door de inwendige punten daarvan gevormd wordt. Hieruit volgt, dat men in de ongelijkheid (3) onder I_k een der open intervallen, welker som de puntverzameling W is, verstaan kan. Telt men dan al deze ongelijkheden bij elkander op, en maakt men gebruik van de volkomen addiviteit van $F(A)$, dan vindt men:

$$F(W) > amW \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Uit (4) volgt nu, daar

$$mB = mW - m(W - B),$$

$$mW - \varepsilon \leqq mB \leqq mW \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Uit (5) volgt:

$$F(B) = F(W) - F(W - B) \geqq F(W) - \eta \quad . \quad . \quad (8)$$

Uit (6) en (8) volgt nu:

$$F(B) > amW - \eta.$$

Is a nu positief, dan heeft men wegens (7):

$$F(B) > amB - \eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Is a negatief, dan heeft men:

$$F(B) > amB - a\varepsilon - \eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Daar men in de formules (9) en (10) de getallen ε en η tot 0 kan doen naderen, volgt hieruit:

$$F(B) \geqq amB \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

hetgeen te bewijzen was.

Is mB *niet* eindig, dan kan men B verkrijgen als som van aftelbaar vele puntverzamelingen van eindige maat. Voor elk van deze geldt volgens het bovenstaande een ongelijkheid van de gedaante (11). Telt men al deze ongelijkheden bij elkander op, en past de volkomen additiviteit van $F(A)$ toe, dan verkrijgt men de te bewijzen stelling.

§ 144. De stelling, die in de vorige § bewezen werd, is gemakkelijk uit te breiden tot het geval, dat a niet eindig is, mits $mB > 0$.

Is $a = \pm \infty$ en is $mB = 0$, dan heeft de stelling geen zin. Uit $mB = 0$ volgt, wegens de absolute continuïteit, dat $F(B) = 0$.

Is $mB > 0$, en $a = -\infty$, dan spreekt het vanzelf, dat

$$F(B) \geqq amB.$$

Is $a = +\infty$, en $mB > 0$, dan is $F(B) = +\infty$. Uit het in de vorige § bewezene volgt n.l. in dit geval, dat voor elk eindig getal a' geldt, dat $F(B) \geqq a'mB$.

Van meer belang is, dat ook de volgende stellingen gelden:

Stelling: *Indien in elk punt eener meetbare deelverzameling B van V de bovenste afgeleide van $F(A)$ gedefiniëerd en kleiner is dan een vast, eindig getal a, dan is $F(B) \leqq amB$.*

Stelling: *De stelling van de vorige §, zoowel als de laatst uitgesprokene, blijven gelden, indien men de woorden „bovenste afgeleide" door „benedenste afgeleide" vervangt.*

De bewijzen dezer stellingen zijn, op onbeteekenende wijzigingen na, identiek met het bewijs van de stelling van § 143.

Wij laten hen dus aan den lezer over.

§ **145**. Wij kunnen de stelling van § 143 nog iets uitbreiden tot de volgende

Stelling. *Indien in elk punt eener meetbare deelverzameling B van V, waarin de bovenste afgeleide van $F(A)$ gedefiniëerd is, deze afgeleide grooter is dan een vast, eindig getal a, dan is $F(B) \geqq amB$.*

Analoge uitbreidingen gelden voor de stellingen van de vorige §.

Om de pas geformuleerde stelling te bewijzen, gaan wij als volgt te werk:

Daar V een open puntverzameling is, is ieder punt P van V tevens verdichtingspunt van V, en wel zal vanaf een zekere waarde van den index k elk interval van het net N_k, dat P bevat, geheel tot V behooren. De bovenste afgeleide van $F(A)$ zal dus alleen dan in een punt P van V *niet* gedefiniëerd zijn, indien P *niet* voor alle waarden van k inwendig punt van een interval van het net N_k is. Vanaf een zekere waarde van k behoort P dan tot de begrenzing van een interval van het net N_k.

Nu is de verzameling van alle intervallen van alle netten N_k aftelbaar oneindig. De begrenzing van elk dezer intervallen is een puntverzameling van de maat 0, en hetzelfde geldt dus ook voor de vereeniging van al deze begrenzingen.

De punten van V, waarvoor de bovenste afgeleide niet gedefiniëerd is, vormen dus een puntverzameling van de maat *nul*.

Zij nu B een deel van V. Men kan nu B beschouwen als som van een verzameling B', in welks punten de bovenste afgeleide *wel*, en van een verzameling B'', in welks punten de bovenste afgeleide *niet* gedefiniëerd is. De puntverzameling B'' heeft dan de maat 0, dus ook $F(B'')$. Hieruit volgt:

$$F(B) = F(B') \geqq amB' = amB,$$

hetgeen te bewijzen was.

§ **146**. Zij nu V een open puntverzameling, en zij $F(A)$ een verzamelingsfunctie, die gedefiniëerd en eindig is voor alle

meetbare deelverzamelingen van V, en die volkomen additief en absoluut continu is. Wij bewijzen nu de volgende:

Stelling. *Is B een meetbare deelverzameling van V, in elk punt waarvan de bovenste afgeleide van $F(A)$ gedefiniëerd is, dan is $F(B)$ gelijk aan de integraal dezer bovenste afgeleide over de puntverzameling B.*

Zij B' de verzameling der punten van B, waar de bovenste afgeleide $= +\infty$. Daar volgens het ondersteld $F(B')$ eindig is volgt uit datgene, wat in het begin van § 144 opgemerkt werd, dat $mB' = 0$. Evenzoo blijkt, dat de verzameling B'' der punten van B, waar de bovenste afgeleide $= -\infty$, de maat 0 heeft.

Zij $C = B - (B' + B'')$. Wij beschouwen nu een niet-begrensde rij van getallen a_p, zoodanig, dat:

$$a_0 = 0 < a_1 < a_2 < \ldots\ldots$$

Evenzoo beschouwen wij een niet-begrensde rij van getallen b_p, zoodanig, dat

$$b_0 = 0 > b_1 > b_2 > \ldots\ldots$$

Wij zullen de bovenste afgeleide van $F(A)$, die volgens § 142 een puntfunctie is, door $\varphi(P)$ aanduiden. Zij nu C_p de verzameling der punten van C, waar $a_{p-1} \leqq \varphi(P) < a_p$. Zij verder D_p de verzameling der punten van C, waar $b_p \leqq \varphi(P) < b_{p-1}$.

Volgens § 144 geldt nu voor elk der puntverzamelingen C_p en D_p:

$$F(C_p) \leqq a_p mC_p \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$F(D_p) \leqq b_{p-1} mD_p \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Telt men de ongelijkheden (1) en (2) bij elkander op, en maakt men gebruik van de volkomen additiviteit van $F(A)$, dan krijgt men:

$$F(C) \leqq \Sigma\, a_p mC_p + \Sigma b_{p-1}\, mD_p \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Uit de stelling van § 143 volgt, dat voor ieder getal a', dat kleiner dan een zeker getal a_{p-1} is, geldt:

$$a' mC_p \leqq F(C_p).$$

Hieruit volgt:

$$a_{p-1}\, mC_p \leqq F(C_p) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Evenzoo vindt men:

$$b_p mD_p \leqq F(D_p) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Telt men de betrekkingen (4) en (5) bij elkander op, dan vindt men:

$$\Sigma a_{p-1} m C_p + \Sigma b_p m D_p \leqq F(C) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Wij beschouwen nu eerst *het geval, dat de maat van B, dus ook die van C eindig is.* Verder denken we ons de rij der getallen a_p en die der getallen b_p zoodanig gekozen, dat de bovenste grens van de verschillen $(a_p - a_{p-1})$ en evenzoo die der verschillen $(b_{p-1} - b_p)$ eindig zijn. Is η de grootste dezer 2 bovenste grenzen, dan heeft men:

$$(\Sigma a_p m C_p + \Sigma b_{p-1} m D_p) - (\Sigma a_{p-1} m C_p + \Sigma b_p m D_p) < \eta m C. \quad (7)$$

Wij beschouwen nu een rij α van rijen getallen a_p, welke aan de volgende voorwaarden voldoet:

1^0. Elk getal van een der genoemde rijen behoort ook tot alle volgende rijen. Elke rij bestaat dus uit de getallen van de vorige met eventueel een verzameling van tusschengevoegde getallen.

2^0. De bovenste grenzen der verschillen $(a_p - a_{p-1})$ voor de opeenvolgende rijen vormen een getallenrij, die 0 tot limiet heeft.

Evenzoo beschouwen wij een rij β van rijen getallen b_p, welke voldoet aan de eerste der zoo even genoemde voorwaarden, en aan de voorwaarde, welke men uit de tweede verkrijgt, door de uitdrukking $(a_p - a_{p-1})$ te vervangen door $(b_{p-1} - b_p)$.

Laat men nu de rij der getallen a_p de rij α doorloopen, en evenzoo de rij der getallen b_p de rij β, dan nadert, wegens de tweede der zoo even genoemde voorwaarden de uitdrukking in het linkerlid van (7) tot 0. Men heeft dus:

$$\lim (\Sigma a_p m C_p + \Sigma b_{p-1} m D_p) = \lim (\Sigma a_{p-1} m C_p + \Sigma b_p m D_p) = F(C).$$

Uit de *eerste* der beide genoemde voorwaarden volgt, in verband met de resultaten van het vorige hoofdstuk, (de lezer ga dit na!), dat deze gemeenschappelijke limiet gelijk is aan de *integraal der functie* $\varphi(P)$ *over de puntverzameling C.* Men heeft dus:

$$F(C) = \int_C \varphi(P)\, dV \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Daar de puntverzamelingen B' en B'', die in het begin dezer § genoemd zijn, de maat 0 hebben, heeft men:

$$F(B') = \int_{B'} \varphi(P)\, dV \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

$$F(B'') = \int_{B''} \varphi(P)\, dV \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Telt men de formules (8), (9) en (10) bij elkander op, dan vindt men:

$$F(B) = \int_B \phi(P)\, dV \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11),$$

hetgeen te bewijzen was.

Is de maat van B *niet eindig*, dan kan men B verkrijgen als som van aftelbaar vele puntverzamelingen van eindige maat. Voor elk van deze kan men de, aan (11) analoge, formule afleiden. Telt men deze dan bij elkander op, dan is wegens de volkomen additiviteit van $F(A)$ de som van de linkerleden gelijk aan $F(B)$. De som van de rechterleden zal gelijk zijn aan $\int_B \phi(P)\, dV$, indien $\phi(P)$ over B *sommeerbaar* is. Hebben wij deze sommeerbaarheid aangetoond, dan is het bewijs geleverd. Hiertoe gaan wij als volgt te werk.

Zij E de verzameling der punten van B, waar $\phi(P)$ *niet negatief* is. Deze puntverzameling E is dan de som van de puntverzamelingen B' en C_p, welke in het begin van deze § gedefiniëerd zijn. Daar $mB' = 0$, is $\phi(P)$ over B' sommeerbaar; wij zullen de sommeerbaarheid aantoonen van $\phi(P)$ over de puntverzameling ΣC_p, d. i. de verzameling der punten van B, waar $\phi(P)$ eindig en niet negatief is.

Hiertoe merken wij op, dat, wanneer wij de rij der getallen a_p de rij α laten doorloopen, het volgende geldt:

$$\lim \Sigma a_{p-1} m C_p = \int_{\Sigma C_p} \phi(P)\, dV.$$

Immers, een functie, die in elk punt eener puntverzameling C_p de waarde a_{p+1} heeft, nadert monotoon en niet dalend tot $\phi(P)$. Men heeft verder:

$$\Sigma a_{p-1} m C_p \leqq F(\Sigma C_p),$$

welke laatste uitdrukking, volgens de onderstellingen aan het begin dezer § een eindige waarde heeft. De integraal van $\phi(P)$ over de puntverzameling ΣC_p is dus eindig, dus $\phi(P)$ over deze puntverzameling sommeerbaar.

Evenzoo bewijst men de sommeerbaarheid van $\phi(P)$ over de verzameling der punten van B, waar $\phi(P)$ *niet positief* is. Hieruit volgt de sommeerbaarheid van $\phi(P)$ over B, waarmee ons bewijs voltooid is.

Vervangt men in de stelling, die in deze § bewezen werd, de woorden „bovenste afgeleide" door „benedenste afgeleide", dan blijft zij gelden. Het bewijs blijft volkomen onveranderd.

§ 147. Wij gaan thans over tot het bewijs van de stelling, die in § 141 geformuleerd werd. Zij $F(A)$ een verzamelingsfunctie, die gedefiniëerd en eindig is voor alle meetbare deelverzamelingen eener open puntverzameling V, en die volkomen additief en absoluut continu is. Wij beschouwen een bepaalde rij van netten N_k, waardoor de puntverzameling V overdekt wordt. Met behulp van deze rij netten wordt in elk punt P van V de bovenste afgeleide $\varphi(P)$ van $F(A)$ gedefiniëerd, behalve in de punten der puntverzameling V' van de maat 0, die door de begrenzingen van de intervallen der netten gevormd wordt.

Wij definiëeren nu op V een puntfunctie $f(P)$. Deze stellen wij in elk punt van $(V - V')$ gelijk aan $\varphi(P)$, in de punten van V' gelijk aan 0.

Zij thans B een meetbare deelverzameling van V. Volgens de vorige § geldt nu voor de puntverzameling $C = B(V - V')$ de betrekking:

$$\int_C f(P)\, d\, V = \int_C \varphi(P)\, d\, V = F(C).$$

Verder heeft men voor de puntverzameling $C' = B - C = BV'$:

$$\int_{C'} f(P)\, d\, V = 0 = F(C'),$$

daar de maat van C' gelijk 0 is.

Telt men deze betrekkingen bij elkander op, dan vindt men:

$$\int_B f(P)\, d\, V = F(B),$$

De waarde der verzamelingsfunctie $F(A)$ wordt dus voor elke meetbare deelverzameling B van V verkregen door de puntfunctie $f(P)$ over deze deelverzameling te integreeren. Deze verzamelingsfunctie is dus een *onbepaalde* integraal.

De lezer overtuige zich, dat aan de onderstellingen van § 138 voldaan is.

§ 148. De functie $f(P)$, waarvan volgens de vorige § de verzamelingsfunctie $F(A)$ de onbepaalde integraal is, is in de punten van $(V - V')$ gelijk aan de *bovenste* afgeleide van $F(A)$, in de punten van V' gelijk aan nul. Wij kunnen nu ook de functie $f_1(P)$ beschouwen, die in de punten van $(V - V')$ gelijk is aan de *benedenste* afgeleide van $F(A)$, en in de punten van V' gelijk aan nul. Daar de eigenschappen, die in de voorafgaande §§ zijn afgeleid, zoowel aan de bovenste als aan de benedenste afgeleide toekomen, geldt het betoog van § 147 ook voor de functie $f_1(P)$ en is dus ook haar onbepaalde integraal gelijk aan $F(A)$.

Dit beteekent, dat voor elke meetbare deelverzameling B van V geldt:

$$\int_B f(P)\, d\, V = \int_B f_1(\mathrm{P})\, d\, V = F(B). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Daar in elk punt de bovenste afgeleide van $F(A)$ niet kleiner kan zijn dan de benedenste, is steeds $f(P) \geqq f_1(P)$. Zij D de verzameling der punten, waar $f(P) > f_1(P)$. We zullen aantoonen, dat D de maat nul heeft.

Hiertoe beschouwen wij een monotone, niet stijgende rij van positieve getallen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, die nul tot limiet heeft.

Zij D_p de verzameling der punten, waar $f(P) \geqq f_1(\mathrm{P}) + \varepsilon_p$. Hebben alle puntverzamelingen D_p de maat nul, dan geldt hetzelfde voor hun vereeniging D. Was nu echter voor een bepaalde waarde van p de maat van D_p positief, dan had men:

$$\int_{D_p} f(P)\, d\, V \geqq \int_{D_p} f_1(P)\, d\, V + \varepsilon_p\, mD_p \, . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Daar D_p een deel van V is, is dit echter in strijd met (1). Men heeft dus de:

Stelling: *Bepaalt men met behulp van een zekere rij van netten de bovenste en de benedenste afgeleide eener onbepaalde integraal, dan zijn deze alleen op een puntverzameling van de maat 0 van elkander verschillend.*

Wij kunnen nu ook met behulp van een *tweede* rij van netten de bovenste en de benedenste afgeleide der verzamelingsfunctie $F(A)$ bepalen. Met behulp hiervan vindt men 2 functies $f'(P)$ en $f_1'(P)$, die weer beide $F(A)$ tot onbepaalde integraal hebben. Door een redeneering, volkomen analoog aan de zooeven gehoudene, vindt men, dat $f(P)$ en $f'(P)$ alleen op een puntverzameling van de maat 0 van elkander kunnen verschillen.

De verzameling der punten, waar de beide bovenste afgeleiden bestaan, doch verschillende waarden hebben, is een deel van deze laatste verzameling, en heeft dus eveneens de maat 0.

Tot analoge uitkomst geraakt men, als men de functies $f(P)$ en $f_1'(P)$ met elkander vergelijkt, dus de bovenste afgeleide, die door middel van de eene rij van netten is verkregen, met de benedenste afgeleide, die door middel van de andere rij van netten is verkregen.

Samenvattend hebben wij dus de:

Stelling: *Indien men door middel van 2 rijen van netten de bovenste en de benedenste afgeleide eener onbepaalde integraal bepaalt, zijn de waarden dezer functies alleen op een puntverzameling van de maat 0 niet alle aan elkander gelijk.*

Wij merken nog even op, dat de punten, waar één der vier laatstgenoemde functies niet gedefinieërd is, eveneens een puntverzameling van de maat 0 vormen.

§ **149.** Als toepassing van de thans verkregen uitkomsten diene het volgende:

Zij U een gegeven, meetbare puntverzameling van eindige maat. Wij definiëeren nu een verzamelingsfunctie $F(A)$ door de vergelijking:

$$F(A) = m(AU).$$

Deze functie is *volkomen additief*. Men heeft toch voor een eindig of aftelbaar aantal puntverzamelingen A_p $(p = 1, 2, \ldots)$:

$$F(\Sigma A_p) = m(U \Sigma A_p) = \Sigma m(A_p U) = \Sigma F(A_p).$$

Zij is ook *absoluut continu*. Uit de definitie volgt n.l. onmiddellijk, dat $F(A) \leqq mA$, en dus is $F(A) < \varepsilon$, indien $mA < \varepsilon$ is. De open puntverzameling V der vorige §§ is hier de geheele ruimte R_n.

Wij nemen nu een bepaalde rij netten N_k, en bepalen met behulp hiervan de bovenste en de benedenste afgeleide der functie $F(A)$. Volgens de vorige § zijn deze in alle punten, behalve in die eener puntverzameling van de maat 0, gedefiniëerd en aan elkander gelijk. Zij E de verzameling der punten, waar dit het geval is, E' de complementairverzameling van E. E' is dan de genoemde puntverzameling van de maat 0.

Zij P een punt van E, $\psi(P)$ de gemeenschappelijke waarde der beide afgeleiden in P. Deze functie $\psi(P)$ noemt men de **dikte** der puntverzameling U ten opzichte van de rij van netten N_k.

Definiëeren wij een functie $\psi_1(P)$ door de betrekkingen.

$$\psi(P) = \psi_1(P) \text{ in elk punt van } E,$$
$$\psi_1(P) = 0 \text{ in elk punt van } E',$$

dan heeft deze functie $\psi_1(P)$ de verzamelingsfunctie $F(A)$ tot onbepaalde integraal. Zij onderscheidt zich toch slechts op een puntverzameling van de maat 0 van de functies $f(P)$ en $f_1(P)$ van § 148, en haar integraal is dus over elke puntverzameling dezelfde als voor deze functies.

Men heeft dus voor elke meetbare puntverzameling A

$$\int_A \psi_1(P)\, dV = mAU.$$

Wij definiëeren een nieuwe puntfunctie $\xi(P)$ door de betrekkingen:

$$\xi(P) = 1 \text{ voor elk punt van } U.$$
$$\xi(P) = 0 \text{ voor ieder punt, dat niet tot } U \text{ behoort.}$$

Men heeft dan voor een meetbare puntverzameling A:

$$\int_A \xi(P)\,dV = \int_{AU} \xi(P)\,dV + \int_{A-AU} \xi(P)\,dV = m(AU) + 0.$$

De integralen der functies $\psi_1(P)$ en $\xi(P)$ zijn dus over elke meetbare puntverzameling dezelfde. Door een redeneering, analoog aan die van § 148 vindt men, dat de beide functies dan alleen op een puntverzameling van de maat 0 van elkander kunnen verschillen. Hetzelfde geldt dus ook voor de functies $\xi(P)$ en $\psi(P)$. Men heeft dus de

Stelling: *De dikte eener meetbare puntverzameling U van eindige maat is in ieder punt dier puntverzameling $= 1$, behalve op een puntverzameling van de maat nul. In ieder punt der complementairverzameling van U is zij $= 0$, behalve op een puntverzameling van de maat 0.*

Beschouwen wij thans het geval, dat de maat van U *niet eindig* is. Zij N_1 een net van intervallen, die de geheele ruimte R_n overdekken. Wij denken ons de aftelbaar vele intervallen van dit net tot een rij $I_1, I_2, \ldots$ gerangschikt. Zij I_l' het open interval, dat uit de inwendige punten van het interval I_l bestaat. Zij $U_l = UI_l'$. Wij definiëeren nu de volgende verzamelingsfuncties:

$$F(A) = m(AU)$$
$$F_l(A) = m(AU_l).$$

Verder beschouwen wij een rij van netten $N_2, N_3, \ldots$, die onderverdeelingen van N_1 zijn, en definiëeren met behulp van deze rij de afgeleiden dezer verzamelingsfuncties. In ieder punt, waar de beide afgeleiden van $F(A)$ aan elkander gelijk zijn, noemen wij hun gemeenschappelijke waarde weer de *dikte* van U ten opzichte van de rij netten N_k.

Zij nu P een punt van U_l. Vanaf een zekere index k zal elk interval van het net N_k, dat P bevat, geheel tot I_l' behooren, en dus geen andere punten van U bevatten dan zulke, die tevens punten zijn van I_l'. Voor zulk een interval zijn de waarden der functies $F(A)$ en $F_l(A)$ aan elkander gelijk. Is voor elke waarde van k P een inwendig punt van zulk een interval, zoodat de beide afgeleiden van $F(A)$ in P gedefiniëerd zijn, dan moeten deze dus gelijk zijn aan de overeenkomstige afgeleiden van $F_l(A)$. Is dus de dikte van U_l in $P = +1$, dan is ook van U de dikte $= +1$. Dit is dus het geval voor alle punten van U_l, behalve voor die eener verzameling Z_l van de maat 0. Vereenigt men deze puntverzamelingen Z_l met de verzameling van de begrenzingen der intervallen van het net N_1, dan krijgt men weer een puntverzameling van de maat 0, en in elk punt van U, dat

hiertoe niet behoort, is de dikte $+1$. Analoog bewijst men voor U het tweede deel der stelling.

§ **150.** Uit de definitie van „continuïteit" volgt onmiddellijk de volgende:

Stelling: *Is de functie $f(P)$ continu op een open puntverzameling U, dan is voor elk paar getallen α en β de verzameling der punten van U, waarvoor $\alpha < f(P) < \beta$, een open puntverzameling.*

Is n.l. P_0 een punt van U, dan volgt uit de definitie der continuïteit, dat men bij elk getal ε een open interval I kan vinden zoodanig, dat voor elk punt P van UI geldt:

$$| f(P) - f(P_0) | < \varepsilon.$$

Daar U open is, kan men een interval I' vinden, dat P_0 tot inwendig punt heeft, en een deel van U is. Zij $I'' = II'$. Is nu $\alpha < f(P) < \beta$ en neemt men ε kleiner dan het kleinste der beide getallen $f(P_0) - \alpha$ en $\beta - f(P_0)$, dan is voor ieder punt P van I'':

$$\alpha < f(P) < \beta, \text{ terwijl } I'' \; P_0 \text{ tot inwendig punt heeft.}$$

Hieruit volgt het gestelde.

Wij zullen thans een uitbreiding van deze stelling bespreken, die voor elke meetbare functie geldt.

Zij $f(P)$ een meetbare functie, die op een puntverzameling U gedefiniëerd is. Laten α en β twee *rationale* getallen zijn. Volgens hoofdstuk I vormen alle paren (α, β) van rationale getallen een *aftelbare* verzameling. Deze blijft aftelbaar, indien men er aan toevoegt de verzameling der getallenparen (α, β), waarvan *één* der beide getallen rationaal is, en het andere de waarde $+\infty$ of de waarde $-\infty$ heeft; benevens de getallenparen $(+\infty, +\infty)$, $(+\infty, -\infty)$, $(-\infty, +\infty)$ en $(-\infty, -\infty)$. De aldus verkregen, aftelbare verzameling denken wij ons op de een of ander wijze tot een rij gerangschikt.

Wij verkrijgen dan een rij getallenparen $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), (\alpha_3 \beta_3), \ldots$ Elk getal α_l is dan dus óf rationaal óf $+\infty$ óf $-\infty$; en evenzoo elk getal β_l.

Zij U_l de verzameling der punten van U, waarvoor:

$$\alpha_l \leqq f(P) \leqq \beta_l. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Daar ieder punt van U voor minstens één getallenpaar (α_l, β_l) aan de betrekkingen (1) voldoet, is de vereeniging der puntverzamelingen U_l de puntverzameling U.

Volgens de vorige § bezit elk punt eener puntverzameling U_l, (behalve de punten eener verzameling Z_l van de maat nul), de eigenschap, dat de dikte van U_l in zulk een punt de waarde $+1$

heeft. Zij Z de vereeniging van de aftelbaar vele puntverzamelingen Z_l, dan heeft ook Z de maat nul.

Zij P een punt van de verzameling $U - Z$. Voor *elke* waarde van l, waarvoor $\alpha_l \leqq f(P) \leqq \beta_l$, bezit dan de puntverzameling U_l in P de dikte $+1$. Zijn nu γ en δ 2 *willekeurige* getallen ($\gamma < \delta$), dan kan men steeds een getallenpaar (α_l, β_l) vinden, zoodanig dat $\gamma \leqq \alpha_l < \beta_l \leqq \delta$. De verzameling der punten, waarvoor $\alpha_l \leqq f(P) \leqq \beta_l$, is dan een deel van de verzameling der punten, waarvoor $\gamma \leqq f(P) \leqq \delta$; heeft dus de eerstgenoemde verzameling in een zeker punt de dikte $+1$, dan geldt dit ook voor de laatste.

Men krijgt dus de volgende:

Stelling. *Is op een puntverzameling U een meetbare functie $f(P)$ gedefiniëerd, dan bezit elk punt P_0 van U, (behalve de punten eener verzameling van de maat 0), de eigenschap, dat voor elk paar getallen γ en δ ($\gamma < \delta$) de verzameling der punten, waarvoor $\gamma \leqq f(P) \leqq \delta$, zoo P_0 er toe behoort, in P_0 de dikte $+1$ bezit.*

§ **151**. In de elementaire analyse worden de termen „afgeleide functie" en „onbepaalde integraal" in een andere beteekenis gebruikt dan in dit hoofdstuk. De aldaar gegeven definities, die den lezer wel bekend zullen zijn, zijn de volgende:

Zij op een één-dimensionaal interval $a \leqq x \leqq b$ een puntfunctie $f(x)$ gedefiniëerd. Onder de *afgeleide functie* van $f(x)$ verstaat men de uitdrukking:

$$f'(x) = \lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

indien de limiet in het rechterlid bestaat. Daarbij geeft men aan h alleen zoodanige waarden, dat het punt met de coördinaat $(x+h)$ tot het genoemde interval behoort. Deze afgeleide functie is dus gedefiniëerd voor alle punten van het interval, waar de genoemde limiet bestaat.

Onder de *onbepaalde integraal* van $f(x)$ verstaat men een functie $F(x)$, die eveneens op het genoemde interval gedefiniëerd is, en welker afgeleide in *ieder* punt van dit interval gelijk is aan $f(x)$. Dat een zoodanige functie $F(x)$ niet altijd bestaat, is gemakkelijk aan een eenvoudig voorbeeld te zien. Beschouwen wij hiertoe op het interval $-1 \leqq x \leqq +1$ de functie $f(x)$, die gedefiniëerd wordt door de betrekkingen:

$$f(x) = 0 \text{ voor } -1 \leqq x \leqq 0.$$
$$f(x) = +1 \text{ voor } 0 > x \leqq +1.$$

Men ziet gemakkelijk, dat er geen functie $F(x)$ te vinden is, die in *ieder* punt van het genoemde interval een afgeleide bezit, die gelijk is aan $f(x)$.

Volgens deze laatste definitie is een onbepaalde integraal een *puntfunctie*, terwijl wij in dit hoofdstuk onder een onbepaalde integraal een *verzamelingsfunctie* verstaan. Evenzoo wordt in de elementaire analyse de afgeleide eener puntfunctie, in dit hoofdstuk de afgeleide eener verzamelingsfunctie beschouwd.

Wij zullen thans nagaan, welk verband er tusschen deze 2 stellen definities bestaat.

§ 152. Wij zullen eerst het begrip „absolute continuïteit", dat boven voor *verzamelingsfuncties* gedefiniëerd is, definiëeren voor *puntfuncties*, die op een één-dimensionaal interval gegeven zijn.

Zij dus op het interval $a \leqq x \leqq b$ een functie $f(x)$ gedefiniëerd. Laten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ en $\beta_1, \beta_2, \ldots$ 2 verzamelingen van getallen uit dit interval zijn, die òf beide eindig zijn (en in dit geval uit evenveel getallen bestaan), òf beide aftelbaar oneindig zijn. De functie $f(x)$ heet nu *absoluut continu*, indien men bij elk positief getal ε een positief getal δ kan vinden, zoodanig, dat voor elke 2 getallenverzamelingen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ en $\beta_1, \beta_2, \ldots$, waarvoor:

$$\Sigma \mid \alpha_k - \beta_k \mid < \delta,$$

men tevens heeft:

$$\Sigma \mid f(\alpha_k) - f(\beta_k) \mid < \varepsilon.$$

Stelling: *Een functie, die op een interval $a \leqq x \leqq b$ gedefiniëerd en absoluut continu is, is in ieder punt van dit interval continu.*

Zij x_0 een getal van het beschouwde interval. De definitie van „continuïteit" eischt nu, dat men bij elk positief getal ε een positief getal δ kan vinden zoodanig, dat uit: $\mid x - x_0 \mid < \delta$ steeds volgt $\mid f(x) - f(x_0) \mid < \varepsilon$. Is nu de functie absoluut continu, en kiest men bij het getal ε het getal δ zoodanig als volgens de definitie van „absolute continuïteit" mogelijk is, dan is aan deze voorwaarde zeker voldaan, en is de functie dus continu in het punt x_0.

Uit de absolute continuïteit volgt dus de gewone continuïteit. Het omgekeerde is echter niet het geval. Om dit in te zien, beschouwen wij op het interval $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ de functie $f(x)$, die gedefiniëerd wordt door de volgende betrekkingen:

$$f(x) = \frac{x}{\lg x} \sin \frac{1}{x} \qquad \text{voor } 0 < x \leqq \tfrac{1}{2}.$$

$$f(x) = 0 \qquad \text{voor } x = 0.$$

Men ziet onmiddelijk, dat deze functie continu is in ieder punt van het genoemde interval. Zij bezit zelfs in ieder punt van dit interval een bepaalde, eindige afgeleide. Voor $x > 0$ volgt dit

uit de regels der differentiaalrekening. De waarde der afgeleide voor $x=0$ bedraagt:

$$\lim_{h=0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h=0} \frac{\sin\frac{1}{h}}{\log h} = 0.$$

Om nu aan te toonen, dat deze functie niet absoluut continu is, stellen wij:

$$a_k = \frac{2}{(4k+1)\pi}, \quad \beta_k = \frac{2}{(4k+3)\pi}.$$

Men heeft nu:

$$f(a_k) = \frac{2}{(4k+1)\pi\left\{\lg\frac{2}{\pi} - \lg(4k+1)\right\}}$$

$$f(\beta_k) = \frac{-2}{(4k+3)\pi\left\{\lg\frac{2}{\pi} - \lg(4k+3)\right\}}.$$

Uit deze waarden volgt, dat de reeks $\Sigma\,|\,f(a_k) - f(\beta_k)\,|$ *divergeert.* Is nu δ willekeurig gegeven, dan kan men een index k_0 vinden zoodanig, dat:

$$\sum_{k_0}^{\infty} |\, a_k - \beta_k \,| < \delta.$$

Men heeft dan:

$$\sum_{k_0}^{\infty} |\, f(a_k) - f(\beta_k) \,| = +\infty,$$

zoodat blijkbaar aan de voorwaarde voor absolute continuïteit niet voldaan is.

§ 153. Zooals in de vorige § gebleken is, is de continuïteit eener functie, en zelfs de differentiëerbaarheid voor de absolute continuïteit niet voldoende. Daarentegen geldt de volgende

Stelling: *Is een functie op een gesloten interval* $a \leqq x \leqq b$ *gedefiniëerd en in ieder punt daarvan differentiëerbaar, terwijl de afgeleide begrensd is, dan is de functie absoluut continu.*

Laten g en G respectievelijk de onderste en bovenste grens der afgeleide functie $f'(x)$ op het interval $a \leqq x \leqq b$ zijn, en zij M datgene dezer beide getallen, dat de grootste modulus heeft. Voor ieder punt van het interval geldt dan:

$$|\, f'(x) \,| < M.$$

Volgens de middelwaardestelling der differentiaalrekening heeft men nu voor elk paar getallen a_k en β_k uit het interval:

$$| f(\alpha_k) - f(\beta_k) | = | \alpha_k - \beta_k | \cdot | f'(\gamma_k) | < | \alpha_k - \beta_k | \cdot M,$$

waarin γ_k een getal is, dat tusschen α_k en β_k gelegen is.

Hieruit volgt:

$$\Sigma \mid f(\alpha_k) - f(\beta_k) \mid < M \Sigma \mid \alpha_k - \beta_k \mid .$$

Is dus ε willekeurig gegeven, en neemt men $\delta < \frac{\varepsilon}{M}$, dan zal, indien de som in het rechterlid der laatste ongelijkheid $< \delta$ is, de som in het linkerlid $< \varepsilon$ zijn. De functie is dus absoluut continu.

§ **154.** Voor onze verdere ontwikkelingen hebben wij de volgende stelling noodig:

Stelling. *Een één-dimensionale, open puntverzameling is de som van eindig of aftelbaar vele, open, één-dimensionale intervallen.*

Zij O de gegeven, open puntverzameling, en zij x_0 een getal, dat er toe behoort. Volgens de definitie van „open puntverzameling" bestaat er een interval $a \leqq x \leqq b$, dat x_0 bevat, en een deel van O is. Er bestaan zelfs oneindig vele zulke intervallen; want, heeft men er één, dan zal elk deelinterval hiervan, dat x_0 bevat, aan dezelfde voorwaarden voldoen. Zij α de *onderste* grens der getallen a en β de *bovenste* grens der getallen b, die bij deze intervallen behooren.

Het open interval $\alpha < x < \beta$ bevat het punt x_0. Ieder getal van dit interval, dat tusschen α en x_0 ligt, is een getal a, en behoort dus tot O; ieder getal, dat tusschen x_0 en β ligt, is een getal b, en behoort dus eveneens tot O.

Het getal α daarentegen behoort *niet* tot O. Behoorde het n.l. tot O, dan zou men een interval $c \leqq x \leqq d$ kunnen vinden, dat α tot inwendig punt had, en een deel van O was. Zij b een willekeurig getal tusschen x_0 en β. Het interval $c \leqq x \leqq b$ zou dan x_0 bevatten en een deel van O zijn, m. a. w. het getal c zou tot de bovengenoemde getallen a behooren. Daar nu $c < \alpha$, zou α niet de onderste grens der getallen a zijn.

Analoog bewijst men, dat het getal β niet tot O behoort. Wij laten dit aan den lezer over,

Wij hebben dus bewezen, dat ieder punt van O tot een open interval behoort, dat een deel van O is, doch waarvan de uiteinden niet tot O behooren. *Twee zulke intervallen zullen òf geen enkel punt gemeen hebben, òf samenvallen.* Laten n.l. $\alpha < x < \beta$ en $\gamma < x < \delta$ twee zulke intervallen zijn. Hebben deze een punt gemeen, dan moet men hebben $\gamma < \beta$ en te gelijk $\alpha < \delta$. Is nu $\beta < \delta$, dan behoort het getal β tot het tweede interval, en dus tot O, hetgeen met het ondersteld in strijd is.

En is $\beta > \delta$, dan behoort het getal δ tot het eerste interval, en dus tot O, hetgeen eveneens met het ondersteIde in strijd is. Men moet dus hebben $\beta = \delta$; evenzoo is $\alpha = \gamma$, m. a. w. de beide intervallen vallen samen.

Om nu te bewijzen, dat het aantal intervallen, waaruit O bestaat, (en die, blijken het voorafgaande 2 aan 2 geen punt gemeen hebben), hoogstens aftelbaar oneindig is, beschouwen wij een rij van netten N_k, die de één-dimensionale ruimte R_1 overdekken. Alle intervallen van de netten van deze rij vormen een aftelbare verzameling; wij denken ons deze verzameling tot een rij geordend. Zij nu P een punt van O. Men kan dan een index k vinden zoodanig, dat elk interval van het net N_k, dat P bevat, geheel tot O behoort, en dus een deel is van het interval van O, waartoe P behoort. Elk interval van O bevat dus een interval van één der netten N_k, (zooals men gemakkelijk ziet, zelfs oneindig veel zulke intervallen).

Wij voegen thans, na de intervallen der netten N_k tot een rij geördend te hebben, aan elk interval I van O dat interval van de rij toe, dat een deel van I is, en in de rij een zoo klein mogelijk rangnummer heeft. De verzameling der intervallen van O wordt aldus afgebeeld op een deel van een aftelbare verzameling; zij is dus zelf eindig of aftelbaar.

§ 155. Zij thans op een interval $a \leqq x \leqq b$ een *absoluut continue* functie $f(x)$ gegeven. Wij zullen uit deze puntfunctie een *verzamelingsfunctie* $F(A)$ afleiden. Wij beginnen met de volgende definities:

1⁰. Is A een open interval $c < x < d$, dat een deel van het gegeven interval is, dan is hiervoor:

$$F(A) = f(d) - f(c).$$

2⁰. Is A een *open* deelverzameling van het gegeven interval, dan is hiervoor de waarde der functie gelijk aan de som van haar waarden voor de afzonderlijke, open intervallen, welker som A is.

Om deze laatste definitie te rechtvaardigen, moeten wij aantoonen, dat de som van de functiewaarden voor de intervallen van A onafhankelijk is van de volgorde, waarin men deze intervallen neemt. Hiervoor is noodzakelijk en voldoende, dat de genoemde functiewaarden, indien zij in oneindig aantal aanwezig zijn, een *absoluut convergente* reeks vormen.

Beschouwen wij dus een open deelverzameling A van het gegeven interval, welke de som is van aftelbaar vele, open intervallen $I_1, I_2, \ldots$ Laten α_k en β_k de uiteinden van het interval I_k

zijn. Daar A een deel is van het interval $a \leqq x \leqq b$, heeft men:

$$\sum_1^\infty mI_k = mA \leqq b - a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Daar dus de reeks $\sum_1^\infty mI_k$ convergeert, kan men bij elk positief getal δ een index k_0 vinden zóódanig, dat:

$$\sum_{k_0}^\infty mI_k < \delta. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Is nu ε een willekeurig positief getal, dan kan men hierbij, wegens de absolute continuïteit van $f(x)$, het getal δ zóódanig bepalen, dat uit de vergelijking (2) volgt:

$$\sum_{k_0}^\infty | f(\beta_k) - f(\alpha_k) | < \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Hieruit volgt de absolute convergentie van de reeks

$$\sum_1^\infty \{ f(\beta_k) - f(\alpha_k) \}.$$

De som van deze reeks, welke volgens de bovenstaande definitie gelijk is aan $F(A)$, is dus onafhankelijk van de volgorde der termen.

§ **156**. De functie $F(A)$, die thans voor alle open deelverzamelingen van het interval $a \leqq x \leqq b$ gedefiniëerd is, is voor deze puntverzamelingen *absoluut continu* en *volkomen additief*.

Om het eerste aan te toonen merken wij op, dat men wegens de absolute continuïteit van $f(x)$ bij elk positief getal ε een positief getal δ kan vinden zóódanig, dat uit de betrekking:

$$\sum_1^\infty | \beta_k - \alpha_k | < \delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

steeds volgt:

$$\sum_1^\infty | f(\beta_k) - f(\alpha_k) | < \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Is nu A een open puntverzameling, waarvan de maat kleiner is dan δ, dan voldoen de uiteinden α_k en β_k van de intervallen I_k van A aan de betrekking (1). De betrekking (2) kan men dan schrijven: $\sum_1^\infty | F(I_k) | < \varepsilon$, en hieruit volgt:

$$| F(A) | = | \sum_1^\infty F(I_k) | < \varepsilon,$$

waaruit de absolute continuïteit van $F(A)$ volgt.

Om de volkomen additiviteit aan te toonen, beschouwen wij aftelbaar vele open puntverzamelingen $A_1, A_2, \ldots$, die twee aan twee geen enkel punt gemeen hebben (en natuurlijk deelverzamelingen van het interval $a \leqq x \leqq b$ zijn). Zij $A = \sum_1^\infty A_k$.

Van elk der puntverzamelingen A_k denken wij ons de intervallen

tot een rij gerangschikt. Zij $I_{k,l}$ het interval van A_k, dat het rangnummer l heeft. Al deze intervallen tezamen vormen een aftelbare verzameling, welke wij eveneens tot een rij geordend denken; laat het interval $I_{k,l}$ hierbij het rangnummer m krijgen en, als element van de laatstgenoemde rij, dus voorgesteld worden door I_m.

De intervallen I_m vormen nu de puntverzameling A. Evenals in de vorige § kunnen wij nu aantoonen, dat de reeks:

$$\sum_{m=1}^{\infty} F(I_m) = \sum_{m=1}^{\infty} \{f(\beta_m) - f(\alpha_m)\}$$

absoluut convergeert. Uit het feit, dat de getallen $F(I_{k,l}) = F(I_m)$ de termen van een absoluut convergente reeks vormen, volgt nu, volgens de theorie der dubbele reeksen, dat de som der dubbele reeks $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} F(I_{k,l})$ onafhankelijk is van de wijze van samenvoeging der termen. Deze som is dus dezelfde, of men de termen tot één rij rangschikt, dan wel eerst naar l en dan naar k sommeert. In het eerste geval krijgt men $F(A)$, in het tweede $\sum_{k=1}^{\infty} F(A_k)$. Deze twee uitdrukkingen zijn dus aan elkander gelijk, waaruit de volkomen additiviteit volgt.

De lezer onderzoeke de gevallen, dat het aantal puntverzamelingen A_k *eindig is*, of dat elk van deze slechts uit een eindig aantal intervallen bestaat.

§ **157**. Zij O een open interval, dat gedefiniëerd wordt door de ongelijkheden $c < x < d$, en waarvoor de functie $F(A)$, die in de vorige §§ beschouwd is, een bepaalde waarde $F(O)$ heeft.

Zij m een natuurlijk getal, en laten $c_1, c_2, \ldots, c_m$ getallen zijn, die tot het interval O behooren. We denken ons deze getallen naar opklimmende grootte gerangschikt. Zij O' de puntverzameling die uit de m punten $c_1, \ldots, c_m$ bestaat. De puntverzameling $O - O'$ is nu *open*; zij bestaat uit de intervallen $c < x < c_1$, $c_1 < x < c_2, \ldots, c_m < x < d$.

Wij zullen bewijzen:

$$F(O) = F(O - O').$$

Men heeft n.l.:

$$F(O) = f(d) - f(c).$$

$$F(O - O') = \{f(c_1) - f(c)\} + \{f(c_2) - f(c_1)\} + \ldots + \{f(d) - f(c_m)\}.$$

Hieruit volgt het gestelde.

Zij thans O een open puntverzameling, welke de som is van eindig of aftelbaar vele, open intervallen $O_1, O_2, \ldots$ Zij O' een deelverzameling van O, en zij $O'_k = O' O_k$; wij onderstellen, dat

elke puntverzameling O'_k uit *eindig* vele punten bestaat. Ook dan geldt:

$$F(O) = F(O - O').$$

Men heeft n.l.:

$$F(O) = \Sigma F(O_k).$$

$$F(O - O') = \Sigma F(O_k - O'_k),$$

dit laatste wegens de additiviteit der functie $F(A)$.

Daar nu de afzonderlijke termen in de rechterleden dezer laatste vergelijkingen volgens het reeds bewezene twee aan twee aan elkander gelijk zijn, geldt hetzelfde voor hun sommen, waarmedė het gestelde bewezen is.

§ **158**. Uit het in de vorige § bewezene kunnen wij enkele belangrijke stellingen afleiden.

Stelling: *Zijn O_1 en O_2 twee open puntverzamelingen, welke ieder de som zijn van een eindig aantal open intervallen, dan heeft men:*

$$F(O_1 \dotplus O_2) = F(O_1) + F(O_2) - F(O_1 O_2).$$

De puntverzameling $O_1 O_2$ is de som van een eindig aantal open intervallen, want elk interval van O_1 kan met elk interval van O_2 hoogstens één open interval gemeen hebben. Trekt men van O_1 af de verzameling van *die* uiteinden van intervallen van $O_1 O_2$, welke punten van O_1 zijn, dan verkrijgt men een open puntverzameling O_1''. Evenzoo verkrijgt men uit O_2 een puntverzameling O_2''. Volgens het in de vorige § bewezene heeft men:

$$F(O_1) = F(O_1'')$$

$$F(O_2) = F(O_2'').$$

De puntverzamelingen $O_1'' - O_1 O_2$ en $O_2'' - O_1 O_2$ zijn nu beiden open; voor deze puntverzamelingen is dus de functie $F(A)$ gedefiniëerd. Men heeft nu:

$$O_1'' \dotplus O_2'' = (O_1'' - O_1 O_2) + (O_2'' - O_1 O_2) + O_1 O_2.$$

Uit de additiviteit der functie $F(A)$ volgt dus:

$$F(O_1'' \dotplus O_2'') = F(O_1'' - O_1 O_2) + F(O_2'' - O_1 O_2) + F(O_1 O_2)$$

$$F(O_1'') = F(O_1'' - O_1 O_2) + F(O_1 O_2).$$

$$F(O_2'') = F(O_2'' - O_1 O_2) + F(O_1 O_2).$$

Daar de puntverzamelingen $O_1 \dotplus O_2$ en $O_1'' \dotplus O_2''$ zich slechts door een verzameling van eindig vele intervaleindpunten van elkander onderscheiden, heeft men ten slotte:

$$F(O_1 \dotplus O_2) = F(O_1'' \dotplus O_2'').$$

Uit deze formules volgt het gestelde.

Stelling: *Zij gegeven een rij van open puntverzamelingen O_k, die elk uit een eindig aantal open intervallen bestaan, en waarvan ieder een deel is van alle volgende. Is dan $O = \lim O_k$, dan is $F(O) = \lim F(O_k)$.*

Waar de functie $F(A)$ voor de open puntverzamelingen, waarvoor zij gedefiniëerd is, absoluut continu is, kan men bij elk positief getal ε een positief getal δ vinden zóódanig, dat voor elke open puntverzameling A, welks maat kleiner is dan δ, men heeft:

$$| F(A) | < \varepsilon.$$

Daar verder uit $O = \lim O_k$ volgt, dat $m\,O = \lim m\,O_k$, kan men bij elk positief getal δ een index k_0 vinden, zoodanig, dat voor $k \geqq k_0$ men heeft:

$$m(O - O_k) < \delta.$$

Elke puntverzameling O_k bestaat, volgens het ondersteldе, uit een eindig aantal intervallen, en is een deel van O. Trekt men van O de uiteinden van de intervallen van O_k af, voor zoover deze tot O behooren, dan verkrijgt men een puntverzameling O_k'''.

Volgens de uitkomsten van § 157 heeft men nu:

$$F(O_k''') = F(O).$$

Daar een verzameling, die uit eindig vele punten bestaat, de maat 0 heeft, is $m\,O_k''' = m\,O$, en $m(O_k''' - O_k) = m(O - O_k)$.

Wegens de additiviteit der functie $F(A)$ heeft men nu:

$$F(O) = F(O_k''') = F(O_k) + F(O_k''' - O_k).$$

Neemt men nu $k \geqq k_0$, dan is:

$$m(O_k''' - O_k) < \delta.$$

En hieruit volgt: $| F(O_k''' - O_k) | < \varepsilon$.

Bij toename van k nadert dus $F(O_k''' - O_k)$ tot 0, en dus is $F(O) = \lim F(O_k)$, hetgeen te bewijzen was.

Stelling: *De formule* $F(O_1 + O_2) = F(O_1) + F(O_2) - F(O_1\,O_2)$ *geldt voor 2 willekeurige open puntverzamelingen.*

De puntverzameling O_1 is de som van eindig of aftelbaar vele open intervallen, welke wij tot een rij kunnen rangschikken. Zij $O_{1,k}$ de som van de intervallen, welker index $\geqq k$ is. De puntverzamelingen $O_{1,k}$ voldoen dan aan de onderstellingen, die bij het bewijs van de vorige stelling gemaakt zijn, en men heeft $O_1 = \lim O_{1,k}$.

Evenzoo construeeren wij een rij van puntverzamelingen $O_{2,k}$, welker limiet O_2 is.

Volgens het reeds bewezene heeft men nu voor elke waarde van den index k:

$$F(O_{1,k} \dot{+} O_{2,k}) = F(O_{1,k}) + F(O_{2,k}) - F(O_{1,k}\;O_{2,k}).$$

De puntverzamelingen $(O_{1,k} \dot{+} O_{2,k})$ en $(O_{1,k}\,O_{2,k})$ voldoen eveneens aan de onderstellingen, die bij het bewijs van de vorige stelling gemaakt zijn; hun limieten zijn respectievelijk $O_1 \dot{+} O_2$ en $O_1\,O_2$. Laat men nu in de laatste formule den index k toenemen, dan vindt men door grensovergang het gestelde.

§ 159. **Stelling**: *Is* ε *een willekeurig, positief getal, dan kan men steeds een positief getal* δ *vinden, zóódanig, dat voor elke 2 open puntverzamelingen* O_1 *en* O_2, *waarvoor*:

$$m(O_1 - O_1 O_2) < \delta$$
$$m(O_2 - O_1 O_2) < \delta,$$

men heeft:

$$| F(O_1) - F(O_2) | < \varepsilon.$$

Wij zullen eerst het geval beschouwen, dat de beide puntverzamelingen O_1 en O_2 ieder de som van een eindig aantal open intervallen zijn. Zij O_1'' de puntverzameling, die men verkrijgt door van O_1 af te trekken de verzameling van de eindpunten der intervallen van $O_1 O_2$, voor zoover deze tot O_1 behooren, en zij O_2'' de puntverzameling, die op analoge wijze uit O_2 ontstaat. Men geeft dan:

$$F(O_1) = F(O_1'') = F(O_1'' - O_1 O_2) + F(O_1 O_2).$$
$$F(O_2) = F(O_2'') = F(O_2'' - O_1 O_2) + F(O_1 O_2).$$

Hieruit volgt:

$$F(O_1) - F(O_2) = F(O_1'' - O_1 O_2) - F(O_2'' - O_1 O_2).$$

Is nu ε willekeurig gegeven, dan kan men wegens de absolute continuïteit van $F(A)$ hierbij δ zóó bepalen, dat uit $mA < \delta$ steeds volgt, dat $| F(A) | < \frac{1}{2} \varepsilon$. Neemt men nu $m(O_1 - O_1 O_2) = m(O_1'' - O_1 O_2) < \delta$ en $m(O_2 - O_1 O_2) = m(O_2'' - O_1 O_2) < \delta$, dan is:

$$| F(O_1) - F(O_2) | < \varepsilon.$$

Hiermede is het gestelde bewezen.

Laten thans O_1 en O_2 *willekeurige*, open puntverzamelingen zijn. Evenals in de vorige §, kan men dan O_1 verkrijgen als limiet van een rij open puntverzamelingen $O_{1,k}$, welke ieder uit een eindig aantal open intervallen bestaan, en waarvan ieder een deel van alle volgende is. Evenzoo kan men O_2 verkrijgen als limiet van een rij open puntverzamelingen $O_{2,k}$.

Zij nu ε willekeurig gegeven, en zij δ zoodanig bepaald, dat uit $mA < \delta$ steeds volgt, dat $| F(A) | < \frac{1}{4} \varepsilon$. Is nu:

$$m(O_1 - O_1 O_2) < \delta$$
$$m(O_2 - O_1 O_2) < \delta,$$

dan is vanaf een zekere waarde van den index k steeds:

$$m(O_{1,k} - O_{1,k} O_{2,k}) < \delta$$
$$m(O_{2,k} - O_{1,k} O_{2,k}) < \delta.$$

Uit deze laatste betrekkingen volgt, wegens het reeds bewezene:

$$| F(O_{1,k}) - F(O_{2,k}) | < \frac{1}{2} \varepsilon.$$

Hieruit volgt:

$$| F(O_1) - F(O_2) | = \lim | F(O_{1,k}) - F(O_{2,k}) | \leqq \tfrac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon,$$

waarmede het gestelde bewezen is.

§ **160.** De functie $F(A)$ is tot nu toe gedefinieërd voor alle *open* deelverzamelingen van het interval $a \leqq x \leqq b$. Wij zullen haar thans voor elke meetbare deelverzameling van dit interval definieëren.

Zij A een meetbare deelverzameling van het genoemde interval. Wij beschouwen een willekeurige rij van positieve getallen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, welker limiet 0 is. Bij elk getal ε_k kan men (Zie hoofdstuk III) een open puntverzameling O_k vinden, die A bevat, en waarvan de maat minder dan ε_k van die van A verschilt. (Bij elke waarde van ε_k behooren oneindig vele zulke puntverzamelingen; wij denken ons echter telkens een bepaalde uitgekozen).

Wij zullen aantoonen, dat de functiewaarden $F(O_k)$ een convergente getallenrij vormen, en dat de limiet van deze rij dezelfde blijft, wanneer men een andere rij van puntverzamelingen O_k neemt, die aan dezelfde onderstellingen voldoet (waarbij ook de rij der getallen ε_k niet dezelfde behoeft te zijn). Wij definiëeren dan:

$$F(A) = \lim_{k=\infty} F(O_k).$$

Volgens de algemeene limietstelling van CAUCHY zal de rij der getallen $F(O_k)$ convergeeren, indien men bij elk getal ε een index k_0 kan vinden zóódanig, dat, wanneer k_1 en k_2 beide $\geqq k_0$ zijn, men steeds heeft:

$$| F(O_{k_1}) - F(O_{k_2}) | < \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Uit het onderstelde volgt nu, dat $\lim\limits_{k=\infty} m\, O_k = m\, A$.

Bij elk getal δ kan men dus een index k_0 vinden zóódanig, dat, wanneer k_1 en k_2 beide $\geqq k_0$ zijn, men steeds heeft:

$$m\, O_{k_1} - m\, A = m(O_{k_1} - A) < \delta.$$
$$m\, O_{k_2} - m\, A = m(O_{k_2} - A) < \delta.$$

Nu is A een deel van $O_{k_1} O_{k_2}$, en dus is $O_{k_1} - O_{k_1} O_{k_2}$ een deel van $O_{k_1} - A$. Men heeft dan dus ook:

$$m(O_{k_1} - O_{k_1} O_{k_2}) < \delta. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Evenzoo heeft men:

$$m(O_{k_2} - O_{k_1} O_{k_2}) < \delta. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Kiest men nu bij een gegeven getal ε het getal δ zóódanig als dit volgens de vorige § mogelijk is, dan volgt uit de betrekkingen (2) en (3) de betrekking (1). Hiermede is de convergentie van de rij der getallen $F(O_k)$ bewezen.

Laten thans *twee* rijen O_k en O_k' gegeven zijn. Men heeft dan:

$$\lim_{k=\infty} m\,O_k = m\,A \text{ en } \lim_{k=\infty} m\,O'_k = m\,A.$$

Hieruit volgt, dat men bij elk getal δ een index k kan vinden zóódanig, dat, als k_1 en k_2 beide $\geqq k_0$ zijn, men steeds heeft:

$$m\,(O_{k_1} - A) < \delta.$$
$$m\,(O'_{k_2} - A) < \delta.$$

Door een redeneering, volkomen analoog aan de boven gegevene, vindt men, dat, wanneer bij een gegeven getal ε het getal δ passend gekozen is, uit de laatste betrekkingen volgt:

$$| F(O_{k_1}) - F(O'_{k_2}) | < \varepsilon.$$

En dit is onmogelijk, tenzij:

$$\lim_{k=\infty} F(O_k) = \lim_{k=\infty} F(O'_k).$$

§ 161. De functie $F(A)$ is thans gedefiniëerd voor alle meetbare deelverzamelingen van het interval $a \leqq x \leqq b$. Wij zullen bewijzen, dat zij absoluut continu en volkomen additief is.

In § 156 hebben wij bewezen, dat de functie $F(A)$ absoluut continu is voor de *open* puntverzamelingen, waarvoor zij gedefiniëerd is. Men kan dus bij elk positief getal ε een positief getal δ vinden zóódanig, dat voor elke open deelverzameling O van het genoemde interval, waarvoor $m\,O < \delta$, men heeft:

$$| F(O) | < \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1).$$

Zij nu A een willekeurige puntverzameling, waarvoor $F(A)$ gedefiniëerd is. Deze functiewaarde is dan de limiet van de functiewaarden voor een rij van open puntverzamelingen O_k, die A bevatten, en welker maten tot die van A naderen. Is nu $m\,A < \delta$, dan is vanaf een zekeren index k de maat $m\,O_k < \delta$. Vanaf de genoemde waarde van den index zullen de getallen $F(O_k)$ dus aan de betrekking (1) voldoen en hieruit volgt:

$$| F(A) | = \lim | F(O_k) | \leqq \tfrac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon.$$

Hieruit volgt de *absolute continuïteit.*

Laten nu 2 meetbare puntverzamelingen A_1 en A_2 zonder gemeenschappelijke punten gegeven zijn. Bij deze puntverzamelingen construeeren wij, evenals in § 160, twee rijen van open puntverzamelingen $O_{1,k}$ en $O_{2,k}$. Volgens § 158 heeft men nu voor elke waarde van den index k:

$$F(O_{1,k} \dotplus O_{2,k}) = F(O_{1,k}) + F(O_{2,k}) - F(O_{1,k}\,O_{2,k}) \quad . \quad (1)$$

Uit de wijze, waarop de beide rijen van puntverzamelingen geconstrueerd zijn, volgt volgens § 160:

$$\lim_{k=\infty} F(O_{1,k}) = F(A_1).$$
$$\lim_{k=\infty} F(O_{2,k}) = F(A_2).$$

Een puntverzameling $(O_{1,k} \dotplus O_{2,k})$ bevat steeds $A_1 + A_2$. Hieruit volgt:

$$m(A_1 + A_2) \leqq m(O_{1,k} \dotplus O_{2,k}) \leqq m\, O_{1,k} + m\, O_{2,k}.$$

Hieruit volgt, dat de rij der puntverzamelingen $(O_{1,k} \dotplus O_{2,k})$ ten opzichte van $A_1 + A_2$ aan analoge veronderstellingen voldoet als de 2 gegeven rijen ten opzichte van A_1 en A_2, en dat men in het bijzonder heeft:

$$m(A_1 + A_2) = \lim_{k=\infty} m(O_{1,k} \dotplus O_{2,k}).$$

Hieruit volgt weer:

$$F(A_1 + A_2) = \lim_{k=\infty} F(O_{1,k} \dotplus O_{2,k}).$$

Wij zullen nu in het bijzonder onderstellen, dat elk der puntverzamelingen $O_{1,k}$ een deel is van alle voorafgaande, en dat hetzelfde geldt voor elk der puntverzamelingen $O_{2,k}$. De doorsnede van alle puntverzamelingen $O_{1,k}$ is een inwendige grensverzameling O_1; de doorsnede van alle puntverzamelingen $O_{2,k}$ is een dergelijke puntverzameling O_2.

Men kan nu schrijven.

$$O_1 = A_1 + N_1$$
$$O_2 = A_2 + N_2,$$

waarin N_1 en N_2 puntverzamelingen van de maat nul zijn. Hieruit volgt:

$$\lim_{k=\infty} (O_{1,k}\, O_{2,k}) = O_1\, O_2 = (A_1\, N_2 + A_2\, N_1) \dotplus N_1\, N_2.$$

Deze puntverzameling, die wij door N_3 zullen aanduiden, heeft dus de maat 0. De puntverzamelingen $(O_{1,k}\, O_{2,k})$ voldoen nu ten opzichte van N_3 aan dezelfde onderstellingen als de puntverzamelingen $O_{1,k}$ ten opzichte van A_1; men heeft dus:

$$\lim_{k=\infty} F(O_{1,k}\, O_{2,k}) = F(N_3) = 0;$$

dit laatste wegens de absolute continuïteit van $F(A)$.

Laat men nu in de formule (1) den index k de rij der natuurlijke getallen doorloopen, dan vindt men, dat voor de limieten der termen de betrekking geldt:

$$F(A_1 + A_2) = F(A_1) + F(A_2) - 0.$$

De functie $F(A)$ is dus *additief* voor 2 puntverzamelingen A_1 en A_2. Door volledige inductie vindt men, dat zij additief is voor een *eindig* aantal puntverzamelingen.

Om nu de *volkomen additiviteit* van $F(A)$ aan te toonen, beschouwen wij een *rij* van puntverzameling $A_1, A_2, \ldots$, die 2 aan 2 geen enkel punt gemeen hebben, en deelverzamelingen zijn van het interval $a \leqq x \leqq b$. Is A de som dezer puntverzamelingen, dan is:

$$m\, A = \sum_1^{\infty} m\, A_k.$$

Wegens de absolute continuïteit der functie $F(A)$ kan men bij elk positief getal ε een positief getal δ vinden zóódanig, dat voor elke puntverzameling, welks maat kleiner is dan δ, de volstrekte waarde der functie $< \varepsilon$. Bij het getal δ kan men nu een index k_0 vinden zoodanig, dat, wanneer $k_1 \geqq k_0$, men heeft:

$$m\,(A - \sum_1^{k_1} A_k) = m\,A - \sum_1^{k_1} m\,A_k < \delta.$$

Hieruit volgt dan:

$$|\,F(A - \sum_1^{k_1} A_k)\,| < \varepsilon.$$

Wegens de, reeds bewezen, additiviteit der functie volgt hieruit:

$$|\,F(A) - \sum_1^{k_1} F(A_k)\,| < \varepsilon.$$

En hieruit volgt:

$$F(A) = \sum_1^{\infty} F(A_k),$$

waarmee de volkomen additiviteit bewezen is.

Uit het laatste bewijs volgt in het algemeen de stelling:

Stelling: *Is een verzamelingsfunctie, die gedefiniëerd is voor alle meetbare deelverzamelingen eener puntverzameling van eindige maat, additief en absoluut continu, dan is zij volkomen additief.*

§ **162**. De resultaten van de vorige §§ kan men samenvatten tot de volgende

Stelling: *Is op een interval I* ($a \leqq x \leqq b$) *een absoluut continue functie* $f(x)$ *gegeven, dan bestaat er een absoluut continue en volkomen additieve verzamelingsfunctie* $F(A)$, *die voor alle meetbare deelverzamelingen van het genoemde interval I gedefiniëerd is, en de eigenschap heeft, dat, als c en d de uiteinden zijn van een deelinterval I′ van I, men heeft:*

$$F(I') = f(d) - f(c) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Volgens de stelling van § 141 is nu de verzamelingsfunctie $F(A)$, wanneer wij haar beschouwen voor de deelverzamelingen van het *open* interval $a < x < b$, een *onbepaalde integraal*, d. w. z. er bestaat een functie $\varphi(x)$, zoodanig, dat, wanneer A een zoodanige puntverzameling is, men heeft:

$$F(A) = \int_A \varphi(x)\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Een deelverzameling van het *gesloten* interval $a \leqq x \leqq b$ wordt door weglating van de ertoe behoorende eindpunten van dit interval tot een deelverzameling van het open interval $a < x < b$.

Door deze bewerking wordt noch de waarde van $F(A)$ noch die van de in (2) voorkomende integraal gewijzigd; de formule (2) geldt dus ook voor alle deelverzamelingen van het gesloten interval.

Uit de formules (1) en (2) volgt nu:

$$f(d) - f(c) = \int_{I'} \varphi(x)\, dx = \int_c^d \varphi(x)\, dx, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

volgens een reeds eerder ingevoerde notatie.

Indien 2 functies $f(x)$ en $\varphi(x)$ op eenzelfde interval I gedefiniëerd zijn, en voor elk deelinterval daarvan de betrekking (3) geldt, zullen wij zeggen, dat de functie $f(x)$ een **onbepaalde integraal** van de functie $\varphi(x)$ is. (Door de term „onbepaalde integraal" wordt dus soms een verzamelingsfunctie, soms een puntfunctie aangeduid; blijkt het niet uit de samenhang, dan moet natuurlijk uitdrukkelijk vermeld worden, welke beteekenis bedoeld wordt).

Is de functie $\varphi(x)$ gegeven op het interval I, en is de integraal van $\varphi(x)$ over elk deelinterval van I bepaald en eindig, dan is de functie $f(x)$ volkomen bepaald, mits men haar waarde in één punt c van het interval I kent. Is n.l. x een willekeurig punt van I, dan volgt uit (3):

$$f(c) - f(x) = \int_x^c \varphi(x)\, dx \qquad \text{voor } x < c.$$

$$f(x) - f(c) = \int_c^x \varphi(x)\, dx \qquad \text{voor } x > c.$$

Kiest men de waarde van $f(c)$ anders, dan verkrijgt men een nieuwe functie $f(x)$, die, zooals men onmiddellijk ziet, van de eerstgevondene een constant bedrag verschilt. Twee functies $f(x)$, die bij eenzelfde functie $\varphi(x)$ behooren, hebben dus steeds een constant verschil.

Omgekeerd is uit het voorafgaande gebleken, dat bij elke absoluut continue functie $f(x)$ een functie $\varphi(x)$ behoort. Bestaat er één functie $\varphi(x)$, dan bestaan er oneindig vele; immers, verandert men de waarden van $\varphi(x)$ in de punten eener verzameling van de maat nul, dan ondergaat hierdoor de integraal van $\varphi(x)$ over de een of andere puntverzameling geen wijziging.

§ 163. Laat weer op een gesloten interval $I\,(a \leqq x \leqq b)$ een absoluut continue functie $f(x)$ gedefiniëerd zijn. Op de wijze, die in de vorige §§ beschreven is, leiden wij uit $f(x)$ een verzamelingsfunctie $F(A)$ af. Wij beschouwen verder een rij van netten N_k, die onderverdeelingen zijn van het interval I.

Met behulp van deze netten definiëeren wij in alle punten van I, behalve in die eener puntverzameling van de maat 0, de bovenste en de benedenste afgeleide van $F(A)$.

Wij zullen nu de volgende stelling bewijzen:

Stelling: *Is de functie $f(x)$ in een punt x van het interval I differentiëerbaar, en bestaat in dit punt de bovenste afgeleide van $F(A)$, dan is deze afgeleide gelijk aan het differentiaalquotiënt van $f(x)$. Hetzelfde geldt voor de benedenste afgeleide van $F(A)$.*

Laten c_k en d_k de uiteinden zijn van het interval van het net N_k, waartoe het beschouwde punt x behoort. Men heeft dan:

$$\lim_{k=\infty} c_k = x$$

$$\lim_{k=\infty} d_k = x.$$

Dat de functie $f(x)$ in het beschouwde punt een bepaald differentiaalquotient $f'(x)$ bezit, wil het volgende zeggen:

$$\lim_{k=\infty} \frac{f(x) - f(c_k)}{x - c_k} = f'(x)$$

$$\lim_{k=\infty} \frac{f(d_k) - f(x)}{d_k - x} = f'(x).$$

De bovenste afgeleide van $F(A)$ in het punt x is de limiet van de rij der getallen:

$$\frac{f(d_k) - f(c_k)}{d_k - c_k}.$$

Men heeft nu:

$$\frac{f(d_k) - f(c_k)}{d_k - c_k} = \frac{\{f(d_k) - f(x)\} + \{f(x) - f(c_k)\}}{d_k - c_k} =$$

$$= \frac{x - c_k}{d_k - c_k} \cdot \frac{f(x) - f(c_k)}{x - c_k} + \frac{d_k - x}{d_k - c_k} \cdot \frac{f(d_k) - f(x)}{d_k - x}.$$

Stellen wij:

$$\frac{x - c_k}{d_k - c_k} = \lambda,$$

dan heeft men:

$$\frac{f(d_k) - f(c_k)}{d_k - c_k} = \lambda \frac{f(x) - f(c_k)}{x - c_k} + (1 - \lambda) \frac{f(d_k) - f(x)}{d_k - x}.$$

Daar $0 \leqq \lambda \leqq 1$, volgt uit deze laatste formule:

$$\lim_{k=\infty} \frac{f(d_k) - f(c_k)}{d_k - c_k} = f'(x).$$

De bovenste en de benedenste afgeleide van $F(A)$ in het punt x zijn dus beide gelijk aan $f'(x)$.

§ **164.** De laatste stelling doet ons het middel aan de hand, een — althans gedeeltelijke — oplossing te geven van het vraagstuk:

Op een interval $a \leqq x \leqq b$ *zij een functie* $\varphi(x)$ *gedefinieërd, bestaat er op dit interval een functie* $f(x)$, *waarvan* $\varphi(x)$ *het differentiaalquotiënt is?*

Om deze vraag te beantwoorden, beschouwen wij eerst op een interval $a \leqq x \leqq b$ een absoluut continue functie $f(x)$, die in elk punt van het interval differentieërbaar is. Volgens de vorige § is het differentiaalquotient $f'(x)$ overal (behalve in de punten eener verzameling van de maat 0) gelijk aan de bovenste afgeleide van de bij $f(x)$ behoorende verzamelingsfunctie $F(A)$; hieruit volgt:

$$F(A) = \int_A f'(x)\, d\, x.$$

Of in het bijzonder:

$$f(d) - f(c) = \int_c^d f'(x)\, d\, x.$$

Men heeft dus de:

Stelling: *Een absoluut continue functie, die differentieërbaar is in elk punt van het interval, waarop zij is gedefinieërd, is een onbepaalde integraal van haar differentiaalquotient.*

Men kan dit ook zóó uitdrukken:

Stelling: *Is eèn functie* $\varphi(x)$ *het differentiaalquotient van een absoluut continue functie* $f(x)$, *dan is* $f(x)$, *een onbepaalde integraal van* $\varphi(x)$.

Is in het bijzonder de functie $\varphi(x)$ op het interval $a \leqq x \leqq b$ *begrensd*, dan is volgens § 153 een functie, die $f(x)$ tot differentiaalquotient heeft, noodzakelijk absoluut continu. Men heeft dus:

Stelling: *Is een begrensde functie* $\varphi(x)$ *het differentiaalquotient van een functie* $f(x)$, *dan is* $f(x)$ *een onbepaalde integraal van* $\varphi(x)$.

Om dus te onderzoeken, of een begrensde functie $\varphi(x)$ een differentiaalquotient is, beschouwen wij een onbepaalde integraal $f(x)$ van $\varphi(x)$. Is nu niet voor iedere getal x: $f'(x) = \varphi(x)$, dan bestaat er geen functie, die voor elke waarde van x de functie $\varphi(x)$ tot differentiaalquotient heeft.

Beschouwen wij bijv. op het interval $0 \leqq x \leqq 2$ een functie $\varphi(x)$, die als volgt gedefinieërd is:

$$\varphi(x) = 0 \text{ voor } 0 \leqq x \leqq 1.$$
$$\varphi(x) = 1 \text{ voor } 1 < x \leqq 2.$$

Geeft men de onbepaalde integraal $f(x)$ van $\varphi(x)$ de waarde 0 voor $x = 0$, dan vindt men gemakkelijk:

$$f(x) = 0 \qquad \text{voor } 0 \leqq x \leqq 1.$$
$$f(x) = x - 1 \text{ voor } 1 < x \leqq 2.$$

De aldus gedefinieërde functie $f(x)$ is echter voor $x = 1$ niet

differentiëerbaar, en de functie $\varphi(x)$ is dus niet het differentiaalquotient eener andere functie.

Is de functie $\varphi(x)$ *niet eindig*, dan bestaat de mogelijkheid, dat zij het differentiaalquotient eener functie $f(x)$ is, zonder dat deze laatste door integratie, (volgens het in dit boek gedefinieërde integraalbegrip) uit $\varphi(x)$ kan worden verkregen.

Dit blijkt, als men voor $\varphi(x)$ het differentiaalquotient neemt van de in § 152 beschouwde differentiëerbare, doch niet absoluut continue functie. Voor nadere studie van het verband, dat in zulke gevallen tusschen de functies $f(x)$ en $\varphi(x)$ bestaat, verwijzen wij den lezer naar uitvoeriger werken.

§ 165. Tot besluit van dit werk zullen wij ons bezig houden met de studie van een zeer belangrijke verzamelingsfunctie. Hiertoe hebben wij een paar stellingen noodig, die wij eerst zullen afleiden.

Zij V een willekeurige puntverzameling eener ruimte R_n; zij V' de complementairverzameling van V. Onder de **begrenzing** van V verstaan wij de verzameling der punten, die òf tot V behooren en verdichtingspunten van V' zijn, òf tot V' behooren en verdichtingspunten van V zijn. De lezer overtuige zich, dat het reeds vroeger gedefinieërde begrip „begrenzing van een interval" een bijzonder geval is van het begrip „begrenzing van een puntverzameling."

Stelling: *De begrenzing van een puntverzameling is zelf een afgesloten puntverzameling.*

Zij B de begrenzing van V en zij P een verdichtingspunt van B. Zij I een open interval, dat P tot inwendig punt heeft. Dit interval I bevat dan minstens één, van P verschillend punt Q van B.

Is Q nu een punt van V, dan is het een verdichtingspunt van V'. Een open interval I_1, dat Q bevat en een deel van I is, zal dus een punt van R van V' moeten bevatten, dat zoowel van Q als van P verschilt.

Evenzoo vindt men, dat, wanneer Q tot V' behoort, het interval I_1 minstens één punt R van V moet bevatten, dat van Q en P verschilt.

Wij zien dus, dat het interval I zoowel van V als van V' minstens één punt moet bevatten, dat van P verschilt. Het punt P is dus zoowel een verdichtingspunt van V als van V'. Daar het zelf òf tot V òf tot V' moet behooren, ziet men, dat het een punt van B is. Hiermede is de stelling bewezen.

§ 166. Zij P een punt eener ruimte R_n met de coördinaten $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ en zij Q een punt met de coördinaten $(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n)$.

De verzameling der punten, die gedefiniëerd worden door de vergelijkingen:

$$x_p = \lambda \xi_p + (1 - \lambda) \eta_p \ldots (0 \leqq \lambda \leqq 1) \ldots (1 \leqq p \leqq n) \quad . \quad (1)$$

noemt men de **verbindingslijn** der punten P en Q.

Stelling. *Is P een punt eener puntverzameling V en is Q een punt van de complementairverzameling V', dan bevat de verbindingslijn der punten P en Q minstens één punt van de begrenzing van V.*

Zij R een punt van de verbindingslijn, dat tot V behoort en niet tot de begrenzing van V. Het is dan geen verdichtingspunt van V' en men kan dus een open interval I vinden, dat R tot middelpunt heeft en waarvan geen enkel punt tot V' behoort.

Zij $\lambda(R)$ de bij het punt R behoorende waarde van de parameter λ. Daar de coördinaten van een punt der verbindingslijn volgens de formules (1) continue functies zijn van λ, kan men bij elk positief getal ε een positief getal δ vinden, zoodanig, dat van elk punt der verbindingslijn, welks parameterwaarde minder dan δ van $\lambda(R)$ verschilt, elk der coördinaten minder dan ε verschilt van de overeenkomstige coördinaat van R. Neemt men nu ε kleiner dan de helft van de kleinste lengte van het interval I, dan ziet men, dat de punten der verbindingslijn, welker parameterwaarden minder dan δ van $\lambda(R)$ verschillen, tot het interval I behooren.

Een analoge uitkomst vindt men, als men een punt der verbindingslijn beschouwt, dat tot V' behoort zonder een punt van de begrenzing te zijn.

Zij nu λ_0 de *bovenste grens* van de waarden van λ, die $\leqq 1$ zijn en waarvoor de bijbehoorende punten der verbindingslijn tot V behooren. Deze bovenste grens is $\geqq 0$, daar men voor $\lambda = 0$ het punt P krijgt, dat tot V behoort. Zij S het bij λ_0 behoorende punt der verbindingslijn.

Was nu S een punt van V, doch niet van de begrenzing, dan zou men volgens het bovenstaande een positief getal δ kunnen vinden zóódanig, dat alle punten der verbindingslijn, welker parameterwaarden tusschen λ_0 en $\lambda_0 + \delta$ lagen, eveneens tot V behoorden. Dit is echter in strijd met de beteekenis van λ_0. Behoorde S tot V', maar niet tot de begrenzing, dan zou men een positief getal δ kunnen vinden zóódanig, dat alle punten, welker parameterwaarden tusschen $\lambda_0 - \delta$ en λ_0 lagen, eveneens tot V' behoorden. Ook dit is in strijd met de beteekenis van λ_0. Het punt S moet dus tot de begrenzing behooren, waarmede de stelling bewezen is.

§ **167**. Zij thans U een begrensde open puntverzameling, die tot een ruimte R_n behoort. Laten op U n functies $f_p(x_1, x_2, \ldots . x_n)$ $(p = 1, 2, \ldots . n)$ gedefiniëerd zijn. Wij stellen:

$$y_p = f_p(x_1, x_2, , \ldots ., x_n) \ldots . (p = 1, 2, \ldots . n) \quad . \quad . \quad (1)$$

De getallen y_p, die bij een bepaald punt P van U behooren, kunnen wij beschouwen als coördinaten van een punt P' eener ruimte R_n'. De punten P', die aldus aan de punten P van U worden toegevoegd, vormen een puntverzameling U' van de ruimte R_n'. Wij zullen nu de volgende onderstellingen maken:

1⁰. Ieder punt P' van U' behoort bij slechts één punt P van U. De coördinaten van P zijn dan dus functies van die van P', welke op de puntverzameling U' gedefinieërd zijn:

$$x_p = \varphi_p(y_1, y_2, \ldots y_n) \qquad (p = 1, 2, \ldots n) \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Het verband tusschen de puntverzamelingen U en U' is m. a. w. één-éénduidig.

2⁰. De puntverzameling U' is weer een begrensde, open puntverzameling.

3⁰. De functies $f_p(x_1, x_2, \ldots x_n)$ zijn continu op U, en hebben continue partieële afgeleiden van de eerste orde, die op U begrensd zijn.

Hetzelfde geldt voor de functies $\varphi_p(y_1, y_2, \ldots y_n)$ op U'.

4⁰. De functionaaldeterminant

$$\begin{pmatrix} y_1\, y_2 \ldots y_n \\ x_1\, x_2 \ldots x_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial y_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} & \ldots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

heeft voor geen enkel punt van U de waarde 0; hetzelfde geldt voor de functionaaldeterminant, die uit de afgeleiden van de grootheden x naar de grootheden y is gevormd.

Deze onderstellingen zijn niet onafhankelijk van elkander; het zou ons echter te ver voeren, hen tot een minimum te reduceeren. Wij merken alleen op, dat de 4⁰ onderstelling een gevolg is van de derde. Volgens een bekende stelling van de differentiaalrekening heeft men n.l.:

$$\begin{pmatrix} y_1\, y_2 \ldots . y_n \\ x_1\, x_2 \ldots . x_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1\, x_2 \ldots . x_n \\ y_1\, y_2 \ldots . y_n \end{pmatrix} = 1.$$

Had dus één der beide determinanten in een zeker punt de waarde 0, dan zou de andere in het correspondeerende punt niet een bepaalde eindige waarde kunnen hebben. Dit zou echter in strijd zijn met de onderstelling, dat alle afgeleiden van de eerste orde in ieder punt bepaald en continu zijn.

§ 168. We zullen eerst uit de onderstellingen van de vorige § eenige gevolgtrekkingen maken. De transformatie, waardoor de puntverzameling U met de puntverzameling U' correspondeert, zullen wij aanduiden door T, haar inverse door T'.

Stelling. *Met elke open deelverzameling O van U correspondeert door T een open deelverzameling O' van U'; en omgekeerd.*

Zij P een punt van O. Daar O open is, kan men een open interval I vinden, dat P tot middelpunt heeft en een deel van O is. Zij ε de helft van de kleinste lengte van dit interval.

Zij P' het met P correspondeerende punt. Daar de functies $\varphi_p\,(y_1, y_2, \ldots y_n)$ in het punt P' continu zijn, kan men een open interval J' vinden, dat P' bevat en de eigenschap heeft dat in elk punt Q' van J' elk der genoemde functies, indien zij daar gedefiniëerd is, minder dan ε van haar waarde in het punt P' verschilt.

Daar verder het punt P' tot de puntverzameling U' behoort, die volgens het onderstelde *open* is, kan men het interval J', zoo het niet een deel van U' is, zoodanig verkleinen, dat het wel een deel is van U'. Dit beteekent, dat dan in elk punt Q' van J' alle functies $\varphi_p\,(y_1, y_2, \ldots y_n)$ gedefiniëerd zijn en met dat punt Q' dus steeds een punt Q van U correspondeert.

Uit hetgeen zooeven omtrent de waarden dezer functies in het punt Q' gezegd is, volgt verder, dat het punt Q steeds moet behooren tot het interval I, dus tot de puntverzameling O. Elk punt Q' van J' behoort dus tot O', het punt P' is dus een *inwendig* punt van O'. Daar dit voor elk punt P' van O' geldt, is O' *open.*

Is O niet open, dan volgt uit het bovenstaande bewijs in elk geval de

Stelling: *Met elk inwendig punt van een puntverzameling O correspondeert door T een inwendig punt van de correspondeerende verzameling O'; en omgekeerd.*

§ 169. Stelling. *Met elk tot U behoorend verdichtingspunt P eener deelverzameling V van U correspondeert door T een verdichtingspunt P' der correspondeerende puntverzameling V'.*

Zal het punt P', dat met een tot U behoorend verdichtingspunt P van V correspondeert, een verdichtingspunt van V' zijn, dan moet elk open interval J', dat P' bevat, een van P' verschillend

punt van V' bevatten. Met dit interval J' correspondeert, voor zoover het tot U behoort, volgens de vorige §, een open puntverzameling J, die natuurlijk P bevat. Zij I een interval, dat P bevat en een deel van J is. Daar P een verdichtingspunt is van V, zal dit interval I een van P verschillend punt Q van V bevatten. Het correspondeerende punt Q' behoort tot J' en tot V', waarmede de stelling bewezen is.

Zij thans weer V een deelverzameling van U. De complementairverzameling van V is de som van de puntverzameling $(U - V)$ en van de complementairverzameling van U. Zij P een tot U behoorend punt van de *begrenzing* van V. Daar U open is, en P dus een inwendig punt van U is, kan P geen verdichtingspunt van de complementairverzameling van U zijn. Het punt P moet dus òf tot V behooren en een verdichtingspunt zijn van $(U - V)$, òf tot $(U - V)$ behooren en een verdichtingspunt van V zijn.

Door de transformatie T correspondeert nu met de puntverzameling V een puntverzameling V', en met de puntverzameling $(U - V)$ de puntverzameling $(U' - V')$. Volgens het boven bewezene zal met ieder, tot U behoorend, verdichtingspunt van V of van $(U - V)$ een verdichtingspunt van de overeenkomstige puntverzameling correspondeeren. Hieruit volgt de

Stelling: *Met het, tot U behoorend, deel van de begrenzing eener deelverzameling V van U correspondeert het tot U′ behoorend deel van de begrenzing van de correspondeerende puntverzameling V′.*

§ 170. Zij V een deelverzameling van U, welke de eigenschap heeft, dat elk tot U behoorend verdichtingspunt van V een punt van V is. Zij V_1 de verzameling der verdichtingspunten van V, die *niet* tot U behooren. De puntverzameling $V + V_1$ is dan afgesloten, en men heeft:

$$U(V + V_1) = UV = V.$$

De puntverzameling V is dus de doorsnede van U met een afgesloten puntverzameling.

Volgens de vorige § zal nu de met V correspondeerende puntverzameling V' de eigenschap bezitten, haar tot U' behoorende verdichtingspunten te bevatten. Hieruit volgt de

Stelling: *Met elke deelverzameling van U, die de doorsnede is van U met een afgesloten puntverzameling, correspondeert een deelverzameling van U′, die de doorsnede is van U′ met een afgesloten puntverzameling.*

Uit de één-éénduidigheid der betrekking tusschen de punten van U en van U' volgt onmiddellijk, dat met de vereeniging en met de doorsnijding van eindig of aftelbaar vele deelverzame-

lingen van U de vereeniging en de doorsnijding der correspondeerende puntverzamelingen correspondeeren.

Is bijv. een deelverzameling van U de doorsnijding van aftelbaar vele open deelverzamelingen van U, dan zal de correspondeerende deelverzameling van U' de doorsnijding van aftelbaar vele open deelverzamelingen van U' zijn. Men heeft dus:

Stelling: *Met elke inwendige grensverzameling, die een deel is van U, correspondeert weer een inwendige grensverzameling.*

Beschouwen wij verder een aftelbaar aantal deelverzamelingen van U, die elk de doorsnede zijn van U met een afgesloten puntverzameling. De vereeniging dezer verzamelingen is dan de doorsnede van U met een uitwendige grensverzameling. Met de genoemde, aftelbaar vele puntverzamelingen correspondeeren soortgelijke deelverzamelingen van U' en men heeft dus de

Stelling: *Met de doorsnede van U met een uitwendige grensverzameling correspondeert de doorsnede van U′ met een uitwendige grensverzameling.*

Indien men nu eindig of aftelbaar vele deelverzamelingen van U, die in- of uitwendige grensverzamelingen zijn, of doorsneden van U met zoodanige verzamelingen, met elkander vereenigt of snijdt, verkrijgt men meer ingewikkelde puntverzamelingen. Op de dan verkregen puntverzamelingen kan men dezelfde bewerkingen toepassen, enz. De puntverzamelingen, die men stap voor stap op deze wijze verkrijgen kan, hebben wij in hoofdstuk II *puntverzamelingen van* Borel genoemd.

Evenals in de reeds beschouwde gevallen vindt men bij elken stap weer, dat met de hierdoor verkregen puntverzamelingen door de transformatie T puntverzamelingen van dezelfde soort correspondeeren. Samenvattend hebben wij dus de

Stelling: *Met elke deelverzameling van U, die een puntverzameling van* Borel *is, correspondeert door de transformatie T weer een puntverzameling van* Borel.

§ **171**. Zij thans A een deelverzameling van U. Door de transformatie T correspondeert met A een deelverzameling A' van U'. Wij definiëeren nu een *verzamelingsfunctie* $F(A)$ door de vergelijking:

$$F(A) = m\,A'.$$

Daar U', volgens het in § 167 ondersteld, begrensd is, is ook A' begrensd, en dus het getal $m\,A'$ steeds eindig.

Beschouwen wij een rij van deelverzamelingen A_k $(k = 1, 2, \ldots)$ van U, die 2 aan 2 geen enkel punt gemeen hebben, en puntverzamelingen van Borel zijn. De correspondeerende puntver-

zamelingen A_k' zijn volgens de vorige § puntverzamelingen van Borel, en dus meetbaar. Men heeft dus:

$$m(\Sigma A_k') = \Sigma\, m A_k'.$$

Hieruit volgt:

$$F(\Sigma A_k) = \Sigma F(A_k)$$

Stelling: *De functie* $F(A_k)$ *is volkomen additief voor de puntverzamelingen van* Borel, *waarvoor zij gedefiniëerd is.*

§ 172. Wij zullen de afgeleide der verzamelingsfunctie $F(A)$ in een gegeven punt P van U gaan bepalen. Hiertoe beschouwen wij een rij van netten N_k, die de eigenschap hebben, dat voor elke waarde van den index k het punt P een inwendig punt is van een interval I_k van het net N_k. Vanaf een bepaalde waarde van den index k zal het genoemde interval I_k geheel tot U behooren; wij zullen uitsluitend waarden van den index k beschouwen, waarvoor dit het geval is.

Met een interval I_k, dat een deel van U is, correspondeert door de transformatie T een puntverzameling I_k'. Zij J_k het open interval, dat uit de inwendige punten van I_k bestaat. Volgens de uitkomsten der vorige §§ correspondeert met J_k een *open* puntverzameling J_k'. De puntverzameling $(I_k - J_k)$ vormt de begrenzing van I_k; de correspondeerende puntverzameling $(I_k' - J_k')$ vormt dus dat deel van de begrenzing van I_k', dat tot U' behoort.

Om nu deze puntverzamelingen I_k' en J_k' nader te bestudeeren, onderwerpen wij de ruimte R_n', met de daarin gelegen puntverzameling U' aan een nieuwe transformatie T' waardoor zij worden omgezet in een ruimte R_n'' met een puntverzameling U''. Deze transformatie verkrijgen wij als volgt.

Zij $p_{l,m}$ de waarde, die de afgeleide $\dfrac{\partial y_l}{\partial x_m}$ in het punt P bezit. De genoemde transformatie T' wordt dan gedefiniëerd door de vergelijkingen:

$$y_l = \sum_{m=1}^{m=n} p_{l,m}\, z_m + \eta_l \ldots (l = 1, 2, \ldots n) \quad \ldots\ldots (1)$$

In deze vergelijkingen zijn de grootheden y_l de coördinaten van een punt der ruimte R_n, de grootheden z_m de coördinaten van het correspondeerende punt der ruimte R_n''. De grootheden η_l zijn de coördinaten van het aan P toegevoegde punt P' der ruimte R_n'.

Elimineert men uit de vergelijkingen (1), te zamen met de vergelijkingen, die de transformatie T bepalen, de grootheden y_p, dan verkrijgt men n vergelijkingen van den vorm:

$$z_p = \psi_p(x_1, x_2, \ldots . x_n) \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Volgens een bekende stelling uit differentiaalrekening heeft men nu:

$$\begin{pmatrix} z_1\, z_2 \ldots . z_n \\ x_1\, x_2 \ldots . x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1\, z_2 \ldots . z_n \\ y_1\, y_2 \ldots . y_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1\, y_2 \ldots . y_n \\ x_1\, x_2 \ldots . x_n \end{pmatrix} \quad . \quad . \quad (3)$$

Beschouwt men nu in het bijzonder het punt P (en de daarmee correspondeerende punten P' en P''), dan worden de elementen van de determinant, die de *tweede* factor is in het rechterlid der vergelijking (3), juist de getallen $p_{l,m}$, en deze determinant wordt dus de determinant der vergelijkingen (1).

De eerste factor in het rechterlid der vergelijking (3) is de determinant van de vergelijkingen, die men krijgt door uit de vergelijkingen (1) de grootheden z_m op te lossen. Hieruit volgt, dat het product dezer determinanten de gedaante heeft:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots\ldots & . \\ . & . & \ldots\ldots & . \\ . & . & \ldots\ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 1 \end{vmatrix} .$$

Men heeft m. a. w. *in het punt P*:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z_l}{\partial x_m} &= 0 \quad \text{voor } l \neq m \\ \frac{\partial z_l}{\partial x_m} &= 1 \quad \text{voor } l = m \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Laten $\xi_1, \xi_2, \ldots . \xi_n$ de coördinaten van het punt P zijn. Uit de vergelijkingen (1) volgt, dat de coördinaten z_p van het correspondeerende punt P'' der ruimte R_n'' alle de waarde 0 hebben. Zij nu $x_1, x_2, \ldots . x_n$ de coördinaten van een willekeurig punt der ruimte R_n, dan stellen wij:

$$x_p - \xi_p = \Delta\, x_p . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Volgens de middelwaardestelling der differentiaalrekening kan men nu de vergelijkingen (2) aldus schrijven:

$$z_l = \sum_{m=1}^{m=n} \psi'_{l,x_m}(\xi_1 + \Theta_l \Delta x_1, .. \xi_m + \Theta_l \Delta x_m, .. \xi_n + \Theta_l \Delta x_n) \Delta x_m .. (l = 1, 2 .. n) \; (6)$$

In deze formules duidt het symbool ψ'_{l,x_m} de partieële afgeleide aan van de functie ψ_l naar x_m. De getallen Θ_l liggen tusschen 0 en 1.

Zij ε een positief getal. De afgeleiden der functies ψ_l zijn lineaire combinaties van die der functies φ_l; zij zijn dus ook continu op U. Men kan dus het interval I_k, dat P bevat, zoodanig kiezen, dat in alle punten van dit interval alle afgeleiden ψ'_{l,x_m} minder

dan ε van hun waarden in het punt P, die door de formules (4) gegeven worden, verschillen.

Een tweede voorwaarde, waaraan door het interval I_k vanaf een zekere waarde van den index k voldaan wordt, is de volgende.

Het aan P toegevoegde punt P'' behoort tot de open puntverzameling U''. Men kan dus een interval K'' vinden, dat P'' tot middelpunt heeft en een deel van U'' is. Zij K_1'' een gesloten interval, dat P'' tot middelpunt heeft, en waarvan alle lengten kleiner zijn dan de overeenkomstige lengten van K''. Is dan S'' een punt de ruimte R_n'', dat niet tot K'' behoort, dan zal dit punt S'' geen verdichtingspunt zijn van K_1'', noch van eenige deelverzameling van K_1''. *A* fortiori geldt dit voor een punt, dat niet tot U'' behoort. Met de puntverzameling K_1'' correspondeert nu in de ruimte R_n een puntverzameling K_1, die P tot inwendig punt heeft. Vanaf een zekere waarde van k zal nu het interval I_k een deel van K_1 zijn, dus I_k'' een deel van K_1''. Daar dan geen enkel punt buiten U'' verdichtingspunt van I'' kan zijn, behoort de geheele begrenzing van I_k'' tot U'', deze begrenzing is dus identiek met de puntverzameling $(I_k'' - J_k'')$.

Wij zullen verder onderstellen, dat de index k zóódanig bepaald is, dat het interval I_k aan de beide genoemde voorwaarden voldoet.

§ 173. Teneinde de berekening van de afgeleide der functie $F(A)$ te vergemakkelijken, zullen wij verder onderstellen, dat alle intervallen van alle netten N_k n-dimensionale *kubussen* zijn. Dit geldt dan dus ook voor het, bij het punt P behoorende interval I_k, dat aan de beide, in de vorige § geformuleerde, voorwaarden voldoet. De aldus verkregen uitkomst kan, zooals wij weten, hoogstens op een puntverzameling van de maat 0 verschillen van de uitkomst, die met behulp van een andere rij van netten zou worden verkregen.

Zij nu het interval I_k gedefiniëerd door de betrekkingen:

$$a_p \leqq x_p \leqq b_p. \qquad (p = 1, 2, \ldots) \quad \text{(7)}$$

Is h de lengte van elk der ribben van dit interval, dan heeft men voor elke waarde van p:

$$b_p - a_p = h. \quad \text{(8)}$$

Verder heeft men voor alle punten van het interval I_k:

$$|\Delta x_p| \leqq h \quad (p = 1, 2, \ldots n) \quad \text{(9)}$$

Wij stellen:

$$\xi_p - a_p = c_p, \; b_p - \xi_p = d_p. \quad \text{(10)}$$

Wij keeren thans terug tot de formules (6) van de vorige §.

Uit hetgeen wij omtrent het interval I_k ondersteld hebben, tezamen met de formules (9), volgt, dat voor alle punten van I_k de volstrekte waarde van elk dier termen in de rechterleden der vergelijkingen (6), waarvoor $l \neq m$, kleiner is dan $h\varepsilon$. De termen, waarvoor $l = m$, verschillen minder dan εh van de waarde Δx_l.

Uit dit laatste volgt, dat voor elk punt van I_k'' geldt:

$$-c_p - nh\varepsilon \leqq z_p \leqq d_p + nh\varepsilon. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Deze betrekkingen (11) definieëren een interval L_k'', waarvan I_k'' dus een deel is.

Thans beschouwen wij in het bijzonder een punt van de begrenzing van I_k. Voor zulk een punt geldt voor een bepaalde waarde van den index m:

$$\Delta x_m = -c_m, \text{ òf } \Delta x_m = d_m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Uit de eerste dezer vergelijkingen volgt, in verband met het bovenstaande:

$$z_m \leqq -c_m + nh\varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Uit het tweede volgt:

$$z_m \geqq d_m - nh\varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Hieruit volgt, dat de puntverzameling $(I_k'' - J_k'')$, welke volgens de vorige § de begrenzing van I_k'' vormt, gelegen is buiten het open interval M_k'', dat gedefinieërd wordt door:

$$-c_p + nh\varepsilon < z_p < d_p - nh\varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Nemen wij $\varepsilon < \frac{1}{4n}$, dan zal het interval M_k'' zeker niet leeg zijn. Beschouwen wij nu in het bijzonder het middelpunt C van I_k. Hiervoor is voor elke waarde van p:

$$\Delta x_p = \tfrac{1}{2}(-c_p + d_p).$$

De lezer overtuige zich, dat het, met C correspondeerende punt C'' tot M_k'' behoort.

Het interval M_k'' bevat dus een punt C'' van I_k'' en geen enkel punt van de begrenzing van I_k''. Hieruit volgt, dat M_k'' *geheel* tot I_k'' behoort. Immers, bevatte het een punt, dat *niet* tot I_k'' behoorde, dan zou de verbindingslijn van dit punt met C'' een punt van de begrenzing moeten bevatten, dat tot M_k'' behoorde. De puntverzameling I_k'' is dus een deel van L_k'' en bevat M_k''. De maat van I_k'' ligt dus in tusschen de maten van L_k'' en M_k''.

Wij laten nu het getal ε een rij van positieve getallen doorloopen, die 0 tot limiet heeft. De bijbehoorende indices k hebben tot limiet $+\infty$. Berekent men nu met behulp van de definieërende vergelijkingen der intervallen L_k'' en M_k'' de maten dezer inter-

vallen, dan vindt men respectievelijk $(h + 2nh\varepsilon)^n$, en $(h - 2nh\varepsilon)^n$ De maat van I_k bedraagt h^n. Hieruit volgt:

$$\lim_{k=\infty} \frac{m L_k''}{m I_k} = 1, \lim_{k=\infty} \frac{m M_k''}{m I_k} = 1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Hieruit volgt:

$$\lim_{k=\infty} \frac{m I_k''}{m I_k} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Zij D de determinant, welks elementen de getallen $p_{l,m}$ zijn. Volgens hoofdstuk III wordt bij de affiene transformatie T', die de ruimte R_n' in de ruimte R_n'' omzet, de maat van elke puntverzameling met $\frac{1}{|D|}$ vermenigvuldigd. Men heeft dus:

$$m I_k' = |D| \,.\, m I_k''.$$

Dus:

$$\lim_{k=\infty} \frac{m I_k'}{m I_k} = |D| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Deze limiet is nu de gezochte afgeleide. Nu is de waarde van den determinant D gelijk aan die van den functionaaldeterminant $\begin{pmatrix} y_1 y_2 \ldots y_n \\ x_1 x_2 \ldots x_n \end{pmatrix}$ in het punt P, waarin men de afgeleide bepaald heeft. Men heeft dus:

Stelling: *De afgeleide van de functie $F(A)$, ten opzichte van een rij van netten van kubussen, is in elk punt, waarin zij gedefinieërd is, gelijk aan de volstrekte waarde van den functionaaldeterminant* $\begin{pmatrix} y_1 y_2 \ldots y_n \\ x_1 x_2 \ldots x_n \end{pmatrix}$.

Een belangrijke opmerking is nog de volgende:

Om over de afgeleide der functie $F(A)$ in het punt P te kunnen spreken, moet men onderstellen, dat het punt P steeds een inwendig punt is van het interval I_k. Indien de lezer echter de afleiding, die in de laatste §§ gegeven is, nog eens nagaat, zal hij zien, dat zij nagenoeg onveranderd blijft, indien het punt P vanaf een zekere waarde van den index k tot de begrenzing van twee of meer intervallen I_k uit het net N_k behoort. *De uitkomst, die door de formules* (17) *en* (18) *wordt uitgedrukt, geldt dus ook in dit geval.* Voor het interval I_k kan men hierbij een der intervallen kiezen, tot welker begrenzing P behoort.

§ 174. Wij zullen thans bewijzen, dat de functie $F(A)$ *absoluut continu* is.

In § 167 hebben wij ondersteld, dat de eersten afgeleiden der grootheden y_l naar de grootheden x_m op U begrensd zijn. Hier-

uit volgt, dat ook de functie $\left|\begin{pmatrix} y_1 y_2 \ldots y_n \\ x_1 x_2 \ldots x_n \end{pmatrix}\right|$ op U begrensd is. Zij G de bovenste grens dezer functie op U. Zij δ een positief getal, en zij B een deelverzameling van U, waarvan de maat kleiner is dan δ. Men kan dan een open deelverzameling O van U vinden, die B bevat, en waarvan de maat eveneens kleiner is dan δ. Voor de correspondeerende puntverzamelingen B' en O' geldt dan weer, dat B' een deel van O' is. Dus is $m B' \leqq m O'$, m. a. w. $F(B) \leqq F(O)$.

Wij beschouwen nu een rij van netten N_k, die de ruimte R_n overdekken, en die uit n-dimensionale kubussen bestaan. Uit het net N_1 kiezen wij de intervallen uit, die deelen zijn van O en voldoen aan de betrekking.

$$F(I) < 2\, G\, m\, I.$$

Uit het net N_2 kiezen wij de intervallen uit, die aan deze zelfde voorwaarden voldoen en geen deel zijn van een interval, dat reeds uit N_1 werd uitgekozen. Zoo gaan wij voort en kiezen dus uit het net N_k de intervallen uit, die aan de 2 genoemde voorwaarden voldoen en geen deel zijn van een interval, dat reeds uit een vorig net werd uitgekozen. Volgens de vorige § geldt nu voor elk punt P van U de betrekking:

$$\lim_{k=\infty} \frac{F(I_k)}{m\, I_k} = \left|\begin{pmatrix} y_1 y_2 \ldots\ldots y_n \\ x_1 x_2 \ldots\ldots x_n \end{pmatrix}\right| \leqq G < 2\, G.$$

Hierin is I_k een interval uit het net N_k, dat P bevat, hetzij als inwendig punt, hetzij als punt van de begrenzing. Behoort P tot O, dan zal het interval I_k vanaf een zekere waarde van k een deel van O zijn. Hieruit volgt, dat ieder punt van O tot een interval behoort, dat volgens den bovenstaanden regel is uitgekozen. De vereeniging dezer uitgekozen intervallen is dus met O identiek.

Men ziet onmiddellijk, dat 2 der uitgekozen intervallen hoogstens een deel hunner begrenzing gemeen hebben. Hieruit volgt, dat de maat van O gelijk is aan de som van de maten der uitgekozen intervallen.

Laten K_1, K_2, ... de uitgekozen intervallen zijn, K_1', K_2', ... de puntverzamelingen, die daaraan door de transformatie T toegevoegd zijn. Men heeft dan:

$$O' = K_1' \dotplus K_2' \dotplus \ldots\ldots$$

Hieruit volgt:

$$m\, O' \leqq m\, K_1' + m\, K'_2 + \ldots\ldots$$

m. a. w.:

$$F(O) \leqq F(K_1) + F(K_2) + \ldots\ldots$$
$$< 2\,G\,(m\,K_1 + m\,K_2 + \ldots\ldots)$$
$$< 2\,G\,m\,O.$$
$$< 2\,G\,\delta.$$

Dus is ook:

$$F(B) < 2\,G\,\delta.$$

Is dus ε willekeurig positief gegeven, en neemt men $\delta < \frac{\varepsilon}{2\,G}$, dan is $F(B) < \varepsilon$. Hiermede is de absolute continuïteit der functie $F(A)$ bewezen.

§ 175. In § 147 hebben wij bewezen, dat, wanneer een verzamelingsfunctie $F(A)$ gedefiniëerd is voor alle meetbare deelverzamelingen eener open puntverzameling U (daar V genoemd) en hiervoor volkomen additief en absoluut continu is, men voor elke meetbare puntverzameling B heeft:

$$\int_B f(P)\,d\,V = F(B).$$

Hierin is $f(P)$ een functie, die in elk punt van U, waarin de bovenste afgeleide van $F(A)$ gedefiniëerd is, gelijk is aan die bovenste afgeleide, behalve eventueel op een puntverzameling van de maat 0.

In de andere punten van U, die een puntverzameling van de maat 0 vormen, kan de functie $f(P)$ willekeurig worden gekozen.

Indien de lezer de ontwikkelingen, welke tot het bewijs van deze stelling gevoerd hebben, opmerkzaam nagaat, zal hij zien, dat zij nagenoeg onveranderd blijven, indien de functie $F(A)$ alleen gedefiniëerd is voor de deelverzamelingen van U, die *puntverzamelingen van* Borel zijn, en voor deze volkomen additief en absoluut continu is. De eigenschappen, die in § 147 en de daaraan voorafgaande §§ zijn afgeleid, gelden dan alleen voor puntverzamelingen van Borel.

Daar nu de functie $F(A)$, die in de vorige §§ bestudeerd is, voor alle, tot U behoorende, puntverzamelingen van Borel volkomen additief en absoluut continu is, heeft men, als B een zoodanige puntverzameling is:

$$F(B) = \int_B \left| \begin{pmatrix} y_1\,y_2 \ldots y_n \\ x_1\,x_2 \ldots x_n \end{pmatrix} \right| d\,V. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

De functie $F(A)$ is voor *alle meetbare* deelverzamelingen van U absoluut continu. Zij heeft dus voor elke deelverzameling N van de maat *nul* de waarde 0. Hieruit volgt:

$$F(N) = \int_N \left| \begin{pmatrix} y_1\, y_2 \ldots y_n \\ x_1\, x_2 \ldots x_n \end{pmatrix} \right| d\,V. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Is nu C een willekeurige, meetbare deelverzameling van U, dan kan men C verkrijgen als verschil van een inwendige grensverzameling (welke een puntverzameling van BOREL is) en een puntverzameling van de maat 0. Voor deze beide puntverzamelingen gelden respectievelijk de vergelijkingen (1) en (2). Trekt men deze vergelijkingen van elkander af, dan vindt men:

$$F(C) = \int_C \left| \begin{pmatrix} y_1\, y_2 \ldots y_n \\ x_1\, x_2 \ldots x_n \end{pmatrix} \right| d\,V. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Stelling: *Om de maat van de puntverzameling B' te vinden, die door de transformatie T aan een meetbare deelverzameling B van U wordt toegevoegd, moet men de volstrekte waarde van den functionaaldeterminant* $\begin{pmatrix} y_1\, y_2 \ldots y_n \\ x_1\, x_2 \ldots y_n \end{pmatrix}$ *over B integreeren.*

Deze belangrijke uitkomst hebben wij afgeleid in de onderstelling, dat de puntverzameling U t. o. v. de transformatie T aan bepaalde, in § 167 geformuleerde, voorwaarden voldeed. De lezer overtuige zich, dat de stelling blijft gelden, indien de puntverzameling U de som is van eindig of aftelbaar vele open puntverzamelingen, die elk aan de genoemde voorwaarden voldoen, benevens van een puntverzameling van de maat 0, die door de transformatie T weer in een puntverzameling van de maat 0 wordt omgezet.

§ 176. Zij weer een begrensde, open puntverzameling U gegeven, die door een transformatie T in een dergelijke puntverzameling U' wordt omgezet. Wij onderstellen, dat aan de voorwaarden van § 167 voldaan is.

Zij op U een begrensde, meetbare functie $\varphi(P)$ gedefinieërd. Zij P' het punt van U', dat met een punt P van U correspondeert. Wij definieëren nu op U' een functie $\varphi_1(P')$, waarvan de waarde in elk punt P' dezelfde is als die van de functie $\varphi(P)$ in het correspondeerende punt P.

Integreeren wij de functie $\varphi_1(P')$ over een deelverzameling A van U', dan krijgen wij een integraal $\int_{A'} \varphi_1(P')\, d\,V'$. Wij zullen nu trachten, deze integraal te berekenen door middel van een integraal over de correspondeerende puntverzameling A.

Zij g de onderste, G de bovenste grens van de functie $\varphi(P)$ op A. Wij denken ons tusschen de getallen g en G q getallen a_k ingevoegd:

$$a_0 = g < a_1 < a_2 < \ldots . < a_q < a_{q+1} = G. \quad . \quad . \quad (1)$$

Zij A_k de verzameling der punten van A, waardoor geldt:

$$a_k \leqq \varphi(P) < a_{k+1}.$$

In het bijzonder zal A_{q+1} de verzameling zijn der punten van A, waarvoor $\varphi(P) = G$.

Wij beschouwen nu een rij van verzamelingen van getallen a_k zoodanig, dat de bijbehoorende getallen q toenemen en de limiet $+\infty$ hebben, terwijl het grootste der verschillen $(a_{k+1} - a_k)$ de limiet 0 heeft. Zooals in het vorige hoofdstuk bewezen is, heeft men dan, als A_k' de met A_k correspondeerende puntverzameling is:

$$\int_{A'} \varphi_1(P)\, d\, V' = \lim_{q=\infty} \sum_{k=0}^{k=q+1} a_k\, m\, A_k' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Volgens de vorige § heeft men voor elke waarde van k:

$$m\, A_k' = \int_{A_k} |\, D \,|\, d\, V, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

wanneer D de functionaaldeterminant $\begin{pmatrix} y_1\, y_2 \ldots y_n \\ x_1\, x_2 \ldots x_n \end{pmatrix}$ is.

Men heeft dus voor elke waarde van q:

$$\sum_{k=0}^{k=q+1} a_k\, m\, A_k' = \sum_{k=0}^{k=q+1} a_k \int_{A_k} |\, D \,|\, d\, V. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Wij definieëren bij elke waarde van den index q een functie $\varphi_q(P)$, die in elk punt eener puntverzameling A_k de waarde $|\, D \,|\, a_k$ heeft. Men heeft dan voor elke waarde van q:

$$\sum_{k=0}^{k=q+1} a_k\, m\, A_k' = \int_{A} \varphi_q(P)\, d\, V \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Een punt P van A behoort tot een rij van puntverzamelingen A_k, die bij de opeenvolgende waarden van q behooren; de bijbehoorende getallen a_k hebben tot limiet het getal $\varphi(P)$. Hieruit volgt:

$$\lim_{k=\infty} \varphi_q(P) = \varphi(P)\, |\, D \,| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

En daar alle functies $\varphi_q(P)$ gelegen zijn tusschen de bovenste en onderste grenzen der functie $\varphi(P)\, |\, D \,|$, heeft men:

$$\int_{A'} \varphi_1(P')\, d\, V' = \lim_{q=\infty} \int_{A} \varphi_q(P)\, d\, V = \int_{A} \varphi(P)\, |\, D \,|\, d\, V \quad . \quad (7)$$

Deze formule geeft de oplossing van het vraagstuk, dat wij ons gesteld hadden. Voldoet U niet aan de voorwaarden van § 167, of is de functie $\varphi(P)$ niet begrensd, dan zal men door splitsing van U meestal kunnen nagaan, of de formule geldig blijft.

Wij zullen hierop niet ingaan.

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
3 0112 055792565